مسألة ثلاثة أجسام مقيدة دائرياً

د. محي الدين نظام [*]
د. نبيل جودية [**]
د. حمود العرابي [***]
حنان أمين [****]

(تاريخ الإيداع 9 / 5 / 2021. قُبِل للنشر في15/ 9 /2021)

□ ملخّص □

تصف مسألة ثلاثة أجسام تفاعل ثلاث كتل من خلال قوة الجاذبية لنيوتن. عندما تكون كتلة أحد الأجسام صغيرة جداً مقارنة بكتلة الجسمين الآخرين، تظهر مسألة الأجسام الثلاثة المقيدة.تطورت دراسة هذه المسألة ونظريتها على مدى 300 عام الماضية. نقدم في هذا العمل لمحة عن هذه المسألة ونقدم وصفًا رياضيًا لمسألة ثلاثة أجسام عامة ومقيدة. بالإضافة إلى ذلك، نقدم أيضًا بعض نتائج المحاكاة التي تسلط الضوء على المسألة. قمنا في النهاية، بالتطرق لمسألة المدارات الدورية ونقاط التوازن(نقاط لاغرانج) وتم توضيح منحنيات معدومة السرعة باستخدام المحاكاة الحاسوبية (matlab) كل هذه الأمور ستزيد معرفتنا وتعمق فهمنا لمسألة ثلاثة أجسام ككل.

الكلمات المفتاحية: مسألة ثلاثة أجسام مقيدة دائرياً، طاقة جاكوبي، نقاط لاغرانج، المدارات الدورية، منحنيات السرعة المعدومة

[*] أستاذ – قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية. moheyaldinnizam@gmail.com
[**] أستاذ مساعد – قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة دمشق – دمشق – سورية.nabiljoudieh@gmail.com
[***] أستاذ مساعد – قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة دمشق – دمشق – سورية.hammoudalourabi@gmail.com
[***] طالبة دكتوراه – قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.hananamin@gmail.com

The Circular Restricted Three Body Problem(CR3BP)

Dr. Mohey Aldin Nizam*
Dr. Nabil Joudieh**
Dr. Hammoud ALourabi ***
Hanan Amin****

(Received 9 / 5 / 2021. Accepted 15 / 9 /2021)

□ ABSTRACT □

In this letter we study the three body problem, which describes three masses interacting through Newtonian gravity. When the mass of one of the bodies is negligible compared to that of the other two bodies, the restricted three-body problem arises.The study and the theory of this problem has developed over the last 300 years. It is therefore,in this work we present a review of the problem and give a mathematical description of the general and restricted three body problem. In addition, we also present some simulation results which highlight the rich dynamics of the problem. At the end, we dealt with the problem of periodic orbits and equilibrium points (Lagrange) and zero velocity curves were illustrated using computer simulations (matlab). Allof these would enrich our knowledge and deepen our understanding about the famous three-body problem as a whole.

Keywords: Circular restricted three body problem(CR3BP),Jacobi integral, points, periodic orbits, zero velocity curves (ZVC).Lagrange

***Professor - department of physics, Faculty of science, Tishreen University, Lattakia, Syria. moheyaldinnizam@gmail.com**
****Associate Professor - Department of physics, Faculty of science, University of Damascus, Damascus, Syria. nabiljoudieh@ gmail.com**
*****Associate Professor - Department of physics, Faculty of science, University of Damascus, Damascus, Syria. hammoudalourabi@gmail.com**
******Postgraduaate Student (Ph.D.) - Department of Physics, Faculty of science, University of Damascus, Damascus, Syria. hananamin@gmail.com**

مقدمة:

حاول العديد من الفيزيائيين وعلماء الفلك والرياضيات إيجاد حلول تقريبية لمسألة ثلاثة أجسام ولكنهم لم ينجحوا في ذلك بسبب أنه لا يمكن التنبؤ بحركات الأجسام الثلاثة بشكل عام. وهذا يجعل مسألة ثلاث أجسام واحدة من أكثر المسائل تحدياً في تاريخ العلم.

بداية تمت صياغة هذه المسألة ودراستها من قبل نيوتن Newton [1] في كتابة (Principia) حيث أخذ بعين الاعتبار حركة الأرض والقمر حول الشمس ولم يستطع إيجاد حل تقريبي يتفق مع الملاحظات.

تم اقتراح شكل خاص،المسألة العامة لثلاثة أجسام من قبل أويلرEuler [2] حيث اعتبر 3 أجسام بكتل محدودة واختيارية ووضعها على طول خط مستقيم. أظهر أن هذه الأجسام ستبقى دائماً على هذا الخط من أجل شروط بدء مناسبة وأن الخط سوف يدور حول مركز كتلة الأجسام مما يؤدي إلى حركات دورية لجميع الأجسام الثلاثة على طول القطوع الناقصة.

في نفس الوقت تقريباً، وجد لاغرانجLagrange[3] صنف ثانٍ من المدارات الدورية في مسألة 3 أجسام عامة. حيث أظهر أنه إذا تم وضع الأجسام بطريقة تجعلها تشكل مثلثًا من أضلاع متساوية تتحرك عندئذٍ على طول القطوع الناقصة من أجل شروط بدء محددة، وتحافظ دائمًا على الترتيبنفسه. إن حلول أويلر ولاغرانج معروفة الآن كحلول خاصة لمسألة 3 أجسام عامة.

كان Euler أول من صاغ مسألة ثلاثة أجسام مقيدة دائرياً (CR3BP) Circular Restricted Three Body Problem في نظام إحداثيات دوار،وكان هذا تطورًا مهمًا في دراسة هذه المسألة. درس لاغرانج أيضاً CR3BP وأثبت وجود خمس نقاط توازن[4] (تعرف الآن نقاط لاغرانج Lagrange points) والتي يكون عندها قوى الجاذبية للأجسام متوازنة.

قُدمت مساهمات مهمة لمسألة CR3BP من قبل جاكوبي Jacobi [5] حيث استخدم نظام احداثي دوار مطابق تماماً لِـ Euler ليبرهن آن هناك تكامل للحركة، والذي يعرف الآن باسمه (تكامل جاكوبي) وتم استخدام هذا التكامل من قبل Hill هيل [6] لُيحدد حركة كويكب في مسألة 3 أجسام وينتج ما يُسمى سطوح بسرعة معدومة zero velocity curves(ZVC).

اعتبر Hill حالة خاصة منCR3BP بحيث لدينا كتلتين أصغر بكثير من الكتلة الأولى (وتعرف المسألة الآن بمسألة Hill) وبهذه الطريقة اكتشف صنف جديد من الحلول الدورية [7] . كانت مساهمته الرئيسية في تقديم نهج جديد لحل مسألة3 أجسام: قمر. أرض. شمس.

بعد ما يقرب من مائتي عام من الصياغة الأصلية للمسألة بواسطة نيوتن، طور هيل Hill نظريته القمرية [8]lunartheory، والتي لاتزال تستخدم حتى يومنا هذا في الميكانيكا السماوية[9] مع بعض التعديلات التي أدخلها بروان Brown .

في النصف الثاني من القرن التاسع عشر درس Poincaré [10,11] وطور حّل لمسألة ثلاثة أجسام في كتابه الضخم المكون من ثلاث مجلدات "Les M´ethodes Nouvelles de la M´ecanique C´eleste "، أدى عمل Poincaré إلى عمليات بحث منهجية للمدارات الدورية في مسألة الثلاثة أجسام.

بعد أن تم وضع الكثير من الأسس من قبل Poincare. شهد القرن العشرين تقدماً كبيراً في جبهات عديدة مختلفة في جميع الدراسات السابقة اهتم العلماء بدراسة مسألة ثلاثة أجسام باستخدام الطرائق التحليلية[12,13] .

بحلول 1960، كانت أجهزة الكمبيوتر متطورة بما يكفي لتكامل المسألة عددياً، فتم توسيع التطبيقات الحديثة [15,14] لمسألة ثلاثة أجسام بشكل كبير لتشمل الأرض والقمر والأقمار الصناعية، بالإضافة لأنظمة الكواكب البعيدة خارج المجموعة الشمسية (extrasolar) التي تم اكتشافها مؤخراً.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث بأنه يتناول موضوعاً هاماً ومازال العمل به قائم من قبل العلماء والباحثين، فدراستنا لمسألة ثلاثة أجسام خاصة تهدف لمحاولة فهمها أكثر وتوضيح رياضيات المسألة بشكل مختصر وكيف لجرم سماوي أو مركبة فضائية يخضع لتأثير الجاذبية القادمة من الجسمين الآخرين الأثقل ومناقشة قابلية الحل ونقاط التوازن والحلول العددية من خلال مثال: مسار أرض–قمر–مركبة فضائية.

طرائق البحث ومواده:

الوصف الرياضي لمسألة ثلاثة أجسام عامة:

الصياغة الأساسية:

لدينا في مسألة ثلاثة أجسام عامة ثلاث أجسام تتحرك بفراغ ثلاثي البعد تحت تأثير قوة الجاذبية المتبادلة فقط في حال كانت حركة هذه الأجسام ضمن مستوٍ واحد تسمى: مسألة ثلاث أجسام عامة تقع في مستوٍ

" The planar general three–body problem "

لحل هذه المسألة. يتوجب معرفة حركات الأجسام السابقة والمستقبلية ومن خلالها نستطيع تحديد المواقع والسرعات الآنية.

نعتبر أنه لدينا 3 كتل m_i (i=1,2,3) ومواضعها $(\overrightarrow{ri})$في نظام إحداثي عطالي ديكارتي

نعرف شعاع الموضع النسبي $;\ i \neq j$ $\overrightarrow{rji} = -\overrightarrow{rij}=\overrightarrow{rj} - \overrightarrow{ri}$

نضع معادلات الحركة باعتبار قوة نيوتن هي القوة الوحيدة المؤثرة على الأجسام:

$$m_i \frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2} = G \cdot \sum_{j=1}^{3} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \cdot \vec{r_i} \qquad (1)$$

(ثابت الجاذبية الكوني $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$)

$$\Rightarrow \frac{d^2 r_{1i}}{dt^2} = m_2 \cdot \left(\frac{r_{2i} - r_{1i}}{r_{12}^3}\right) + m_3 \left(\frac{r_{3i} - r_{1i}}{r_{13}^3}\right)$$
$$\frac{d^2 r_{2i}}{dt^2} = m_1 \cdot \left(\frac{r_{1i} - r_{2i}}{r_{21}^3}\right) + m_3 \left(\frac{r_{3i} - r_{2i}}{r_{23}^3}\right) \qquad (2)$$
$$\frac{d^2 r_{3i}}{dt^2} = m_1 \cdot \left(\frac{r_{1i} - r_{3i}}{r_{31}^3}\right) + m_2 \left(\frac{r_{2i} - r_{3i}}{r_{32}^3}\right)$$

وبناء على ذلك توصف المسألة بـ 9 معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية أو 18 معادلة من الدرجة الأولى.

أصبح النظام بحاجة لِـ 18 تكامل مستقل،فلن نستطيع إيجاد 6 تكاملات حركة مركز الكتلة و3 تكاملات للعزم الزاوي و3 تكاملات للطاقة فيصبح لدينا 12 تكامل معروف.

تكاملات الحركة:

نضرب المعادلات (2) بـ m_i ونقوم بجمعها فنحصل على 3 معادلات :

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \frac{d^2 r_{ij}}{dt^2} = 0 \qquad : \ (j, i = 1, 2, 3)$$

وبمكاملة هذه المعادلة مرتين نحصل عل المعادلات:

$$\sum_{i=1}^{3} m_i r_i = A_j . t + B_j \qquad (3)$$

A_J, B_Jثوابت التكامل

من تعريف مركز الكتلة

$$\vec{R}_{cm} = \sum_{i=1}^{3} \frac{m_i \vec{r_i}}{\sum m_i}$$

فهذه المعادلة تعبر عن حركة مركز الكتلة وبالتالي الثوابت A_J, B_J تُعبر عن تكاملات الحركة وبأخذ المركبات الست لهذه الثوابت نستطيع وصف حركة مركز الكتلة في نظام إحداثي عطائي .

إذا ضربنا المعادلة الأولى من (2) بـ r_{11} وبنفس الطريقة للمعادلة الثانية بـ r_{21} والثالثة بـ r_{31} وبإجراء التكامل و إجراء تغير دائري للمتحولات نحصل على المعادلات :

$$\sum_{i=1}^{3} m_i . (r_{i2} \frac{dr_{i3}}{dt} - r_{i3} . \frac{dr_{i2}}{dt}) = c_1$$

$$\sum_{i=1}^{3} m_i . (r_{i3} \frac{dr_{i1}}{dt} - r_{i1} . \frac{dr_{i3}}{dt}) = c_2 \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{3} m_i . (r_{i1} . \frac{dr_{i2}}{dt} - r_{i2} . \frac{dr_{i1}}{dt}) = c_3$$

تُعبر هذه المعادلات عن انحفاظ العزم الزاوي للنظام وبالتالي هذا العزم يبقى ثابتاً أثناء الحركة ، المعادلات (2) تكتب بالشكل : $$m_i \frac{d^2 r_{ij}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{dr_{ij}} \qquad (5)$$

نحصل بضربها بـ $\frac{dr_{ij}}{dt}$ وجمعها علماً أن نعلم أن V تابع للإحداثيات فقط (الطاقة الكامنة للنظام)

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{3} \mathrm{P}_{ij} \frac{d^2 r_{ij}}{dt^2} = -\frac{dV}{dt}$$

بعد التكامل نحصل على

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{P_{ij}^2}{2mi} = -V + c \qquad (6)$$

c : ثابت التكامل ، طالما الجزء الأيسر من المعادلة عبارة عن الطاقة الحركية Tللنظام نضع ثابت التكامل بالشكل $T + V = c$ ويعبر عن انحفاظ الطاقة.

تمكنا من اختصار النظام بـ 6 درجات حرية، يمكن تعميم هذه النتيجة لمسألة n جسم وتكون المعادلات التفاضلية المشكلة للنظام من الدرجة $6n$ وباستخدام نفس التكاملات لهذا النظام يختصر النظام بـ $(6n-12)$ درجة حرة.

مسألة ثلاثة أجسام مقيدة دائرياً:

اشتقاق معادلات الحركة لمسألة 3 أجسام مقيدة دائرياً:

لايمكن حل مسألة 3 أجسام عامة تحليلياً، لذلك سوف نبسط الحل وذلك بدراسة مسألة 3 أجسام مقيدة دائرياً.

نأخذ الحالة الخاصة التي يكون فيها الجسم الثالث أصغر بكثير من الجسمين الآخرين وبالتأكيد نتجاهل قوة الجاذبية منه على الجسمين الباقيين m_1,m_2 والتقييد الأخر هو على المسار (إهليجي أو دائري) في حالتنا دائري ويكون المركز هو مركز الكتلتين m_1,m_2 ويدعى barycenter.

لندرس الجسم الثالث في حقل الجاذبية المتكون من قبل الجسمين الآخرين.

$$\ddot{r}_3 = G.(\frac{m_1}{|r_{31}|^3}.r_{31} + \frac{m_2}{|r_{32}|^3}.r_{32}) \qquad (7)$$

لنعرف التابع $R_w(t)$ من خلال مصفوفة الدوران:

$$R_w(t) = = \begin{pmatrix} \cos(wt) & \sin(wt) & 0 \\ -\sin(wt) & \cos(wt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إن الدراسة بجملة إحداثيات دوارة لذلك سنقوم بتغير المتحولات:

$$R_w^{-1}(t) = = \begin{pmatrix} \cos(wt) & -\sin(wt) & 0 \\ \sin(wt) & \cos(wt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نعرف المتحول الجديد:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_w(t) \quad , \quad r_3 = R_w(t) \begin{bmatrix} r_3^1 \\ r_3^2 \\ r_3^3 \end{bmatrix}$$

حيث r_3^1 , r_3^2 , r_3^3 مكونات الـ r_3 .

في الإحداثيات الجديدة فإن مواضع الأجسام الأساسية ثابت ونشتق معادلات الحركة للجسم الثالث بهذه الإحداثيات لـ نظام إحداثي دوار يدور حول مركز الكتلة (barycenter)

$$\Rightarrow r_3 = R_w^{-1}(t).P \qquad (8)$$

$$\dot{r_3} = \frac{d}{dt}[R_w^{-1}(t).P\,] = \dot{R}_w^{-1}(t).P\ + R_w^{-1}(t).\dot{P}$$

$$\ddot{r}_3 = \ddot{R}_w^{-1}(t).P + 2\dot{R}_w^{-1}\ .\dot{P} + Rw^{-1}(t).\ddot{P}$$

$$[r_{ij}] = [P_{ij}] \qquad \text{حيث}$$

من (7) لدينا:

$$\ddot{r}_3 = G.[\frac{m_1}{(P_{31})^3}R_w^{-1}(t).P_{31} + \frac{m_2}{(p_{32})^3}.R_w^{-1}.P_{32}]$$

$$\ddot{r}_3 = G.R_w^{-1}(t).(\frac{m_1}{|P_{31}|^3}.P_{31} + \frac{m_2}{|P_{32}|^3}.P_{32})$$

نعوض قيمة (8) في هذه المعادلة ونقوم بضرب طرفين المعادلة ب $R_w(t)$ نحصل على :

$$\ddot{P} = -R_w(t).\ddot{R}_w^{-1}(t).P - 2R_w(t)\dot{R}_w^{-1}\ .\dot{P} + G.(\frac{m_1}{|P_{31}|^3}.P_{31} + \frac{m_2}{|P_{32}|^3}.P_{32}) \qquad (9)$$

هذه معادلة اشتقاق شعاع من الدرجة الثانية من أجل الجسم الثالث في نظام إحداثيات دوار.

نعرف عن قيم $R_w(t).\ddot{R}_w^{-1}(t)$ وبعد إجراء الحسابات اللازمة: $R_w(t).\ddot{R}_w^{-1}(t) = -w^2.I_{3\times3}$

$$R_w(t).\ddot{R}_w^{-1}(t) = \begin{bmatrix} o & w & o \\ -w & o & o \\ o & o & o \end{bmatrix}$$

$$P_{31} = P_3 - P_1 = \begin{bmatrix} -x_1 \\ o \\ o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_1 + x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$P_{32} = P_2 - P_3 = \begin{bmatrix} -x_2 \\ o \\ o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x + x_2 \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

إن معادلة الحركة للجسم الثالث(9):

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^2x + 2w\dot{y} - G.\left(\frac{m_1}{r_1^3}.y + \frac{m_2}{r_2^3}.y\right) \\ w^2y - 2w\dot{x} - G.\left(\frac{m_1}{r_1^3}.y + \frac{m_2}{r_2^3}.y\right) \\ -w^2.z \quad + G.\left(\frac{m_1}{r_1^3}.z + \frac{m_2}{r_2^3}.z\right) \end{bmatrix} \qquad (10)$$

حيث

$$r_1 = \sqrt{(x+x_1)^2 + y^2 + z^2} \qquad r_2 = \sqrt{(x+x_2)^2 + y^2 + z^2}$$

إحداثيات بلا أبعاد:

إنّ التعامل مع احداثيات بلا أبعاد يساعدنا باستخدام نتائجنا في مختلف الأنظمة والتطبيق بشكل أفضل، نقوم بأخذ مركز الكتلة عند المبدأ الساكن و الكتلة الأثقل على اليسار (x_1) والكتلة الآخف على اليمين (x_2) وإذا جعلنا هذه الإحداثيات على طول الخط الواصل بين الكتل المار بالمبدأ عندها $(-x_1)$

يُعطى انحفاظ العزم الخطي: $-m_1.x_1 + m_2.x_2 = o$

$$\boxed{\Rightarrow x_1 = \frac{m_2}{m_1}.x_2}$$

المسافة هي : $r_{12} = x_2 - (-x_1) = x_2 + x_1$

نعرف البارامتر: $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$; $o \le \mu \le \frac{1}{2}$

– نعرف واحدة المسافة (du) وتكون المسافة بين الأجسام الأساسية(m_2+m_1) $r_{12} = 1du$

– نعرف واحدة الكتلة mu وبالتالي الكتلة الكلية للنظام $m_1+m_2 = 1mu$

– نعرف أيضا واحدة الزمن بحيث يكون تردد النظام 2π بمعنى آخر أن الأجسام (m_2, m_1) تقوم بدورة خلال 2π في واحدة الزمن (tu) $w = 1rad/tu$

أصبح لدينا $m_1 + \mu = 1 \Rightarrow m_1 = 1 - \mu \Rightarrow \mu = m_2$

ولدينا أيضاً G=1 ثابت الجاذبية

الأن تصبح معادلات الحركة(10) بالشكل

(11)

$$\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2\dot{y}-\dfrac{1-\mu}{r_1^3}.(x+\mu)-\dfrac{\mu}{r_2^3}.\big(x-(1-\mu)\big)\\ y-2\dot{x}-\dfrac{1-\mu}{r_1^3}.y-\dfrac{\mu}{r_2^3}.y\\ -\dfrac{1-\mu}{r_1^3}.z\quad+\dfrac{\mu}{r_2^3}.z\end{bmatrix}$$

الجسم الأول يقع عند $\begin{matrix}y_1=o\\ +x_1=-\mu\end{matrix}$ وكتلته $m_1=1-\mu$ $r_1=\sqrt{(x+\mu\ )^2+\ y^2+\ z^2}$

الجسم الثاني يقع عند $\begin{matrix}x_2=1-\mu\\ y_2=o\end{matrix}$ وكتلته $m_2=\mu$ $r_2=\sqrt{(x-(1-\mu))^2+\ y^2+\ z^2}$

نعرف التابع:

$$U(\,x,y\,,z)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1-\mu}{r^1}+\frac{\mu}{r^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=x-\frac{(1-\mu)}{r_1^3}.(x+\mu)-\frac{\mu}{r_2^3}.(x-(1-\mu)\,)$$

وبشكل مشابه :

$$\frac{\partial U}{\partial y}=y-\frac{(1-\mu)}{r_1^3}.y-\frac{\mu}{r_2^3}.y \qquad (12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{1-\mu}{r_1^3}.z-\frac{\mu}{r_2^3}.z$$

نعوض بمعادلات الحركة (11) يصبح لدينا :

$$\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{Y}\\ \ddot{Z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{y}+\dfrac{\partial}{\partial x}U\\ -2\,\dot{x}+\dfrac{\partial}{\partial y}U\\ \dfrac{\partial}{\partial z}U\end{bmatrix} \qquad (13)$$

نعبر عن معادلات الحركة (13) بالشكل:

$$P\ =(\,x,y\,,z)$$

$$q=\dot{P}=(\dot{x},\dot{y}\,,\dot{z})=\big(v_x\,,v_y\,,v_z\big)=(u,v,\omega)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{P}\\ \dot{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\\ \dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{\omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u\\ v\\ \omega\\ 2\dot{y}+\frac{\partial}{\partial x}U\\ -2\dot{x}+\frac{\partial}{\partial y}U\\ \frac{\partial}{\partial z}U\end{bmatrix}=f(P,q) \qquad (14)$$

طاقة جاكوبي –تكامل الحركة :

لدينا العلاقة التالية:

$$\ddot{x}.\dot{x}\ddot{y}.\dot{y}\ddot{z}.\dot{z} = \frac{1}{2}.\frac{d}{dt}.(\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + \dot{y}^2)$$

$$\dot{x}.(2\dot{y} + U_x) + \dot{y}(-2\dot{x} + U_y) + \dot{z}.U_z = \frac{d}{dt}U = \frac{1}{2}.\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

نكامل بالنسبة للزمن

$$\frac{1}{2}.(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = U(x.y.z) - \frac{c}{2}$$

$$C = 2U(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

C: ثابت اختياري

نعوض قيمة u:

$$C = x^2 + y^2 + 2.\frac{(1-\mu)}{r_1} + 2.\frac{\mu}{r_2} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (15)$$

هذه الكمية المحفوظة هي عبارة عن ثابت جاكوبي (طاقة جاكوبي)

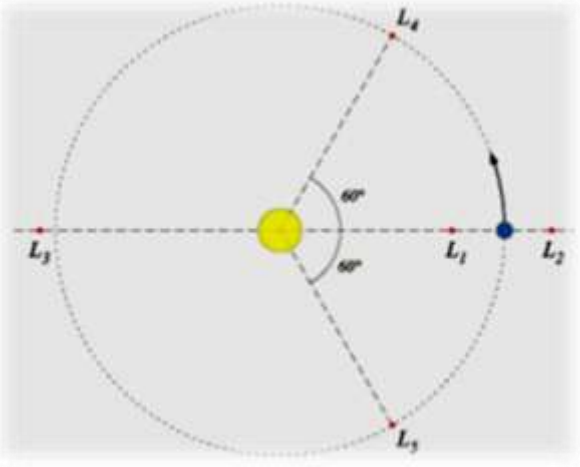
مربع السرعة: $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = |q|^2$

في حالة السرعة معدومة عند طاقة معينة سوف تحل المعادلة :(منحنيات السرعة المعدومة أو منحنيات تساوي الكمون) وتصبح المعادلة بسطح ذو بعدين :

$$x^2 + y^2 + 2.\frac{(1-\mu)}{r_1} + 2.\frac{\mu}{r_2} - c = 0 \quad (16)$$

مواقع نقاط التوازن :

لدينا 5 نقاط توازن في مسألة 3 أجسام مقيدة دائرياً. إذا وقع الجسم السماوي أو القمر الصناعي عند إحدى هذه النقاط مع سرعة ابتدائية معدومة بالنسبة لنظام إحداثي دوار. سوف يبقى هذا الجسم ساكن ولن يكون هناك اضرابات . هذه المواقع الخاصة تدعى نقاط لاغرانج أو نقاط التوازن. لدينا 3 من هذه النقاط تقع على المحور x وهي نقاط التوازن الخطية (collinear) L_1, L_2, L_3 و2 منها مثلثية (equilateral) L_4, L_5 .



الشكل(1): توزع نقاط لاغرانج الخمسة

ومن أجل هذا النظام هي جذور للمعادلة $f(x)=0$ عند أي نقطة $u=v=w=0$
بداية من أجل النقاط الخطية أي $y=z=o$ ومعادلات الحركة(14) تختصر إلى :

$$\frac{\partial u}{\partial u}=x-\frac{(1-\mu)}{{r_1}^3}.(x+\mu)-\frac{\mu}{{r_2}^3}.\big(x-(1-\mu)\big)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad , \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=0$$

$$\Longrightarrow f(P,q)=0 \;\rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$x-\frac{(1-\mu)}{{r_1}^3}.(x+\mu)-\frac{\mu}{{r_2}^3}.\big(x-(1-\mu)\big)=0 \qquad (17)$$

نقاط التوازن الخطية تقع على المحور x وبين $\mu-$و $1-\mu$ وبالتالي لدينا ثلاثة حالات (ثلاث نقاط) :

$$\boxed{1}\;\; x=L_3: \qquad x<-\mu<1-\mu$$
$$\boxed{2}\;\; x=L_1: \qquad -\mu<x<1-\mu$$
$$\boxed{3}\;\; x=L_2: \qquad -\mu<1-\mu<x$$

أصبح لدينا3 معادلات لا خطية :

$$L_1:\; x-\frac{(1-\mu)}{(\mu+x)^3}+\frac{\mu}{(x-1+\mu)^3}=0$$
$$L_2:\; x-\frac{(1-\mu)}{(\mu+x)^3}-\frac{\mu}{(x-1+\mu)^3}=0 \qquad (18)$$
$$L_3:\; x+\frac{(1-\mu)}{(\mu+x)^3}+\frac{\mu}{(x-1+\mu)^3}=0$$

مواقع نقاط التوازن المثلثية (equilteral triangle) أسهل بالحساب طالما أنها تقع عند مثلث متساوي الأضلاع الذي قاعدته الخط بين الجسمين والمسافة من الجسم الأول للثاني يجب أن تكون واحد .

القاعدة تقع على المحور x وارتفاع العمود الثالث $y=\mp\sqrt{3/2}$, $r_1=r_2=1$

$$L_4:\; y=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad , \qquad x=-\mu+\frac{1}{2} \qquad (19)$$

$$L_5:\; y=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad , \qquad x=-\mu+\frac{1}{2} \qquad (20)$$

النتائج والمناقشة:

قمنا بدراسة المعادلات (18) و (19) و (20) بوضع برنامج في بيئة الـMATLABلحساب إحداثيات وطاقة نقاط التوازن الخمسة لـ CRTBP.

$$\mu=\frac{\mathrm{m_1}}{\mathrm{m_2}}=\frac{\mathrm{m_m}}{\mathrm{m_e}}=\frac{\text{كتلته القمر}}{\text{كتلته الأرض}}=0.0123$$

تم أخذxفي المجال$[-2,2]$

علماً أن:

، كتلة القمر $7.36\times10^{22}kg$ ، كتلة الأرض $5.972\times10^{24}kg$

تم التوصل للنتائج التالية:

location	x-coordinate	y-coordinate	energy
L1	0.848079	0.000000	-1.5838206546e+00
L2	1.146765	0.000000	-1.5771597543e+00
L3	-1.004167	0.000000	-1.5049988584e+00
L4	0.490000	0.866025	-1.4950500000e+00
L5	0.490000	-0.866025	-1.4950500000e+00

لحساب المدارات الدورية

نفرض لتخفيض معادلات الحركة من الدرجة الثانية إلى الأولى

$$y_1 = x \quad \text{و} \quad y_2 = \dot{x} \quad \text{و} \quad y_3 = y \quad \text{و} \quad y_4 = \dot{y}$$

من المعادلة (11) نجد :

$$\dot{y_1} = \frac{dy}{dt} = \dot{x} = y_2$$

$$\dot{y_2} = \frac{dy_2}{dt} = 2.y_4 + y_1 - (1-\mu).\frac{y_1+\mu}{r_1^3} - \mu.\frac{y_1-1+\mu}{r_2^3}$$

$$\dot{y_3} = \frac{dy_3}{dt} = \dot{y} = y_4$$

$$\dot{y_4} = \frac{dy_4}{dt} = -2.y_2 + y_3 - (1-\mu).\frac{y_3}{r_1^3} - \mu.\frac{y_2}{r_2^3}$$

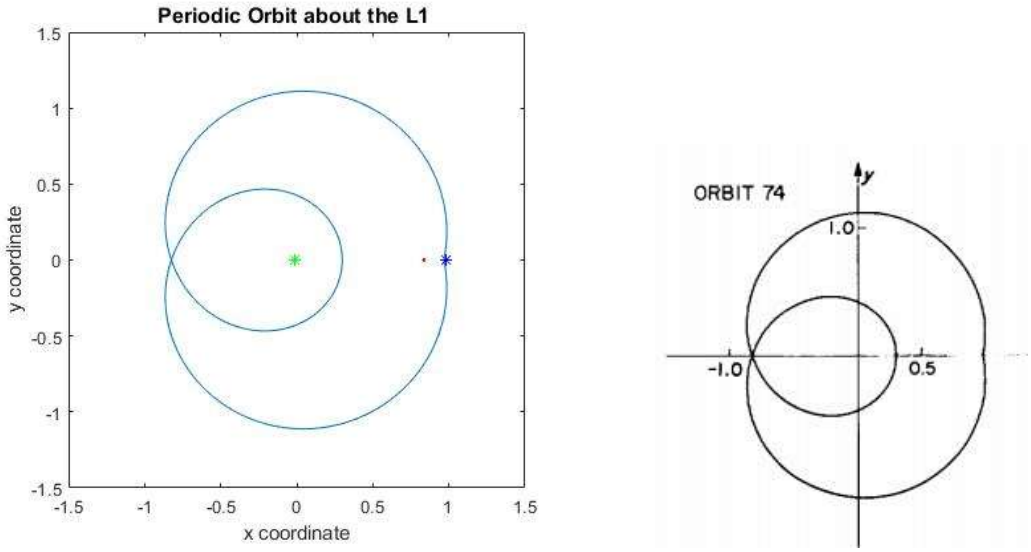
$$r_1 = \sqrt{(y_1+\mu)^2 + y_3^2}\,, \quad r_2 = \sqrt{(y_2-1+\mu)^2 + y_3^2}\,,$$

تشكل الجدول التالي:

$\mathbf{L_1}$	$\mathbf{L_2}$	$\mathbf{L_3}$
$x_0 = 0.30000016$	$x_0 = 2.840829343$ة	$x_0 = -1.600000312$
$\dot{y_0} = -2.536145497$	$\dot{y_0} = -2.747640074$	$\dot{y_0} = 2.066174572$
$\mu = 0.012155092$	$\mu = 0.012155085$	$\mu = 0.012155092$
$t_F = 5.349501906$	$t_F = 11.933318588$	$t_F = 6.303856312$

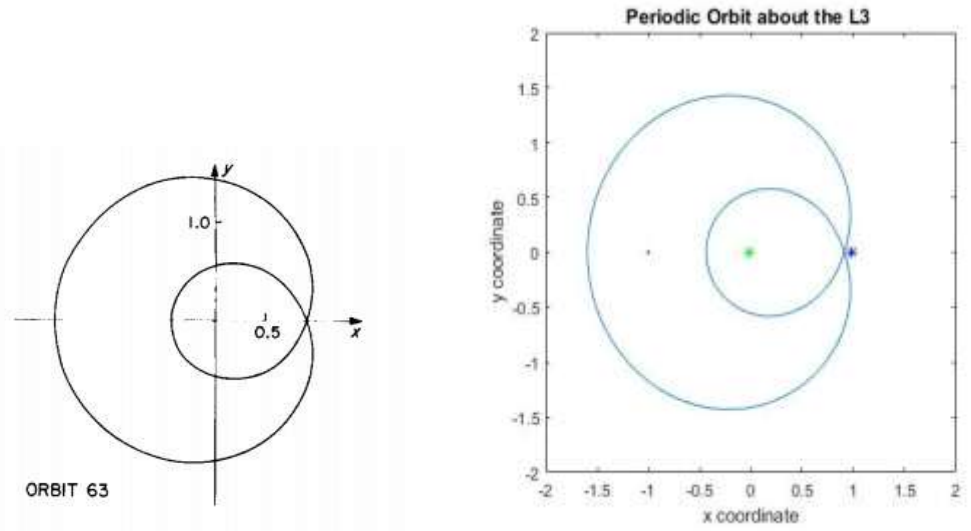
كل مدار معرف بمركبة الموضع البدائيةx_0ومركبة السرعة $\dot{y_0}$ونسبة كتلة الأرض والقمر μ ودور المدار t_f وجميع مركبات الموقع البدائية y_0 ومركبات السرعة البدائية $\dot{x_0}$ لجميع المدارات هي صفر .

باستخدام هذه القيم والاعتماد على خوارزمية رانج كوتا(Runge–Kutta) من المرتبة الرابعة (ode45) واستخدام الـ Matlabتوصلنا للمدار في الشكل (2) (على اليسار) حول $\mathbf{L_1}$وهو يماثل الشكل (2) (على اليمين) في المرجع [16].

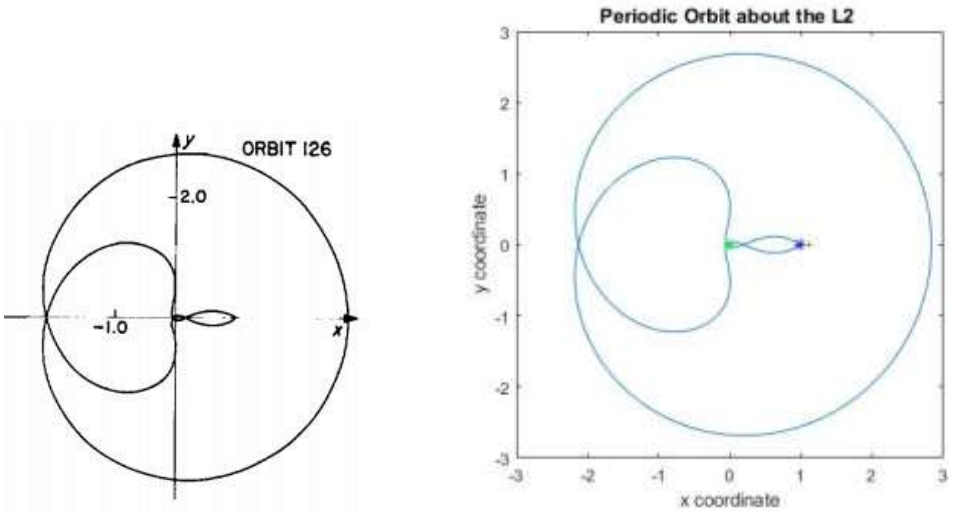


الشكل (2) : المدار الدوري حول نقطة لاغرانج L_1على اليسار الشكل الذي تم التوصل له وعلى اليمين نفس الشكل من المرجع [16].

والأمر نفسه للمدارين حول L_3 و L_2



الشكل (3) : المدار الدوري حول نقطة لاغرانج L_2على اليسار الشكل الذي تم التوصل له وعلى اليمين نفس الشكل من المرجع [16].



الشكل (4): المدار الدوري حول نقطة لاغرانج L_3على اليسار الشكل الذي تم التوصل له وعلى اليمين نفس الشكل من المرجع [16].

فإذا وضعنا مركبات السرعة مساوية للصفر في معادلة الطاقة لجاكوبي (15)

$$C = -2U_O = (1-\mu).\left(r_1^2 + \frac{2}{r_1}\right) + \mu\left(r_2^2 + \frac{2}{r_2}\right) - \mu.(1-\mu) \qquad (21)$$

U_O :طاقة المدار في حالة السرعة معدومة

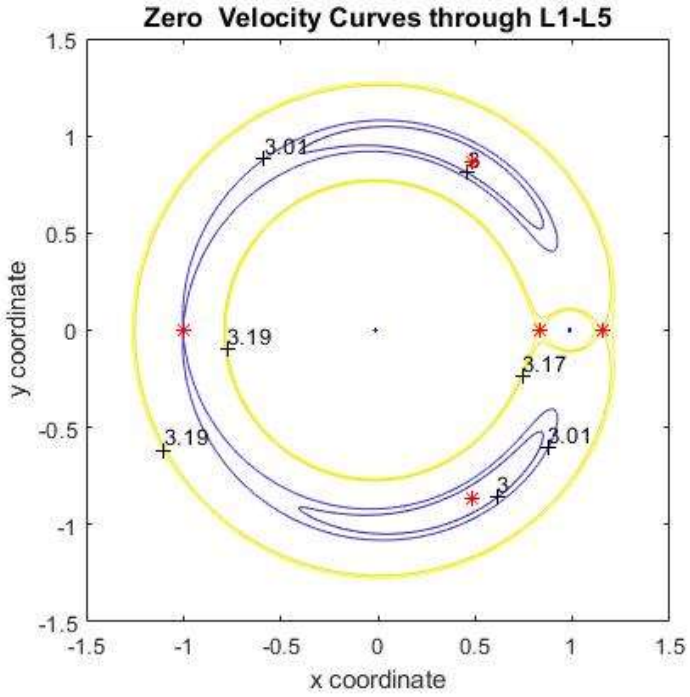
نلاحظ أن هذه المعادلة تعطينا U_O أو C *كتابع لـ* r_1 و r_2 أو لـ x و y وبالتالي نحصل على سطح متساوي الجهد من أجل U_O.

حيث:

$$U_O = \frac{1}{2}.(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r^1} + \frac{\mu}{r^2}$$

قمنا بتوضيح منحنيات متساوية الجهد (equipotential) أو منحنيات السرعة المعدومة(ZVC)والتي تعبر من خلال نقاط التوازن من أجل قيم مختلفة لـ U_O ولكنها جميعها من أجل نسبة كتلة أرض– قمر. ولكي نتمكن من حساب هذه المنحنيات نحل المعادلة (21) من أجل إعطائنا مجموعة قيم للثابت C ثابت جاكوبي.

يتم تمييز نقاط التوازن بعلامات نجمية ويظهر الأرض والقمر كنقاط صغيرة الشكل (4) بينما الشكل (5) هو مأخوذ من المرجع [16].

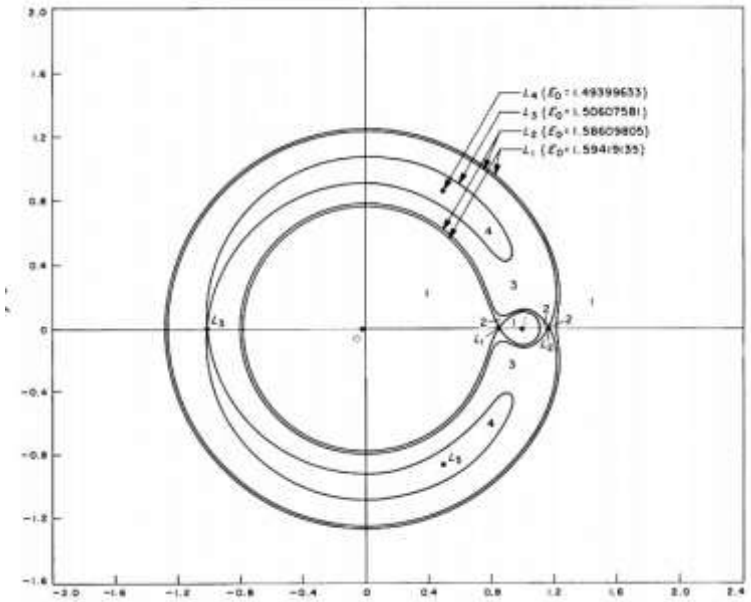


الشكل (5): منحني السرعة المعدومة لنظام قمر–أرض

هذا الشكل يوضح منحنيات معدومة السرعة التي تعبر من خلالها 5 نقاط التوازن أو ما يسمى نقاط لاغرانج لمسألة 3 أجسام مقيدة دائرياً لنظام قمر–أرض (CRTBP) وذلك في المستوي(x, y).

تسمح لنا دراسة هذه الأسطح بتحديد ما إذا كان من الممكن لجسم ما أن ينتقل من الأرض إلى القمر أو ما بعده. أي تحديد سطح السرعة النسبية الصفرية، حيث لا يمكن للقمر الصناعي أو الجسم الفلكي العبور من خلال هذه السطوح عديمة السرعة مالم يتجاوز الطاقة U_O.

وبمقارنة هذا الشكل (5) الذي تم التوصل إليه مع الشكل المأخوذ من **المرجع** [16] وهو الشكل (6) نلاحظ تشابه كبير بالشكل



الشكل (6) توضيح منحني السرعة المعدومة من المرجع [16].

الاستنتاجات والتوصيات:

تم في هذا العمل وصف رياضي لمسألة ثلاثة أجسام عامة وخاصة (المقيدة دائرياً) وتطبيق مباشر على هذه المسألة بدراسة دوران جسمين مثل أرض–قمر حول مركز كتلتهما المشترك وتأثير ذلك على قمر صناعي (الجسم الأخف) يخضع فقط لحقل الجاذبية بدون تأثير الاضطرابات الأخرى وذلك في نظام دوار، بسبب هذه الحركة يظهر لدينا خمس نقاط توازن تدعى نقاط لاغرانج، وقمنا بدراسة عددية لها باستخدام الحاسوب لإيجاد مواقع هذه النقاط ورسم المسار حولها بالإضافة إلى رسم منحنيات معدومة السرعة (ZVC).

نوصي بتطوير هذه الدراسة لتشمل نماذج أخرى من الأنظمة الشمسية ومقارنة النتائج والدقة كما نوصي بدراسة مماثلة في حال تم أخذ الاضطراب بعين الاعتبار والتأثيرات على الأجسام وحركتها ومدى تغير النتائج.

References :

1. Gerald R. Hintz. *Orbital Mechanics and Astrodynamics,* Astronautical Engineering Department University of Southern California,2015.
2. Elisabet Herrera Sucarrat. *The Full Problem of Two and Three Bodies: Application to Asteroids and Binaries,*Surrey Space Centre, UK, October 2012.
3. Mohammed A. Ghazy. *Analytic Construction of Periodic Orbits in the Restricted Three-Body Problem*.Old Dominion University. August 2010
4. Wang Sang Koon. *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design,*California Institute of Technology,April 25, 2011
5. Z.*E. Musielak ; B. Quarles . The three-body problem,* Department of Physics, The University of Texas at Arlington, 2015.
6. Alessandro de Iaco Veris.*Practical Astrodynamics*.Springer Aerospace Technology, Italy,2016.
7. XiaoMing Li1; ShiJun Liao. *More than six hundred new families of New tonian periodic planar collisionless three-bodyorbits* ,Science China Press and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017.
8. Roger R. Bate; Donald D. Mueller; Jerry E. White.*FUNDAMENTALS OF ASTRODYNAMICS,* United States Air Force Academy ,New York, 1971.
9. J H Gru¨tzelius.*The Three Body Problem,*Karlstad University, December 26, 2004.
10. Alain Chenciner.*Poincar´e and the Three-Body Problem,* D´epartement de math´ematique, Universit´e Paris VII,2012.
11. Henri Poincaré.*The Three-Body Problem and the Equations of Dynamics* Translated by Bruce D. Popp, Springer International Publishing AG 2017.
12. Hansjörg Geiges, *The Geometry of Celestial Mechanics,*Cambridge University Press, 2016.
13. Pini Gurfil, P. Kenneth Seidelmann, *Celestial Mechanics and Astrodynamics: Theory and Practice,*Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.
14. Philip W. Sharp.*A Collection of Restricted Three-body Test Problems,* Department of Mathematics, University of Auckland, March 2001.
15. Jan Vrbik.*New Methods of Celestial Mechanics,* Bentham Science Publishers, 2010.
16. R. A. Broucke. *Periodic Orbits in the Restricted Three-Body Problem with Earth-Moon Masses,*California Institute of Technology,1968.