# تقدير المعاملات الابتدائية في صفوف التوابع التحليلية ثنائية التباين

**د. حسن بدور** *

**د. محمد علي** **

**مجد عياش** ***

**(تاريخ الإيداع 9 / 5 / 2021. قُبِل للنشر في 16 / 8 /2021)**

## ملخّص

نقدم في هذا البحث تقدير لمسألة " Fekete–Szegö " في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ المعرف من قبل الباحث "Frasin" حيث أدى هذا التقدير الى تحسين حد المعامل الثالث في هذا الصف وصفه الجزئي $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,1)$ .

**الكلمات المفتاحية:** تابع ثنائي التباين ، مسألة فكيت شيغو ، حدود المعاملات.

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

** أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

*** طالب دراسات عليا (دكتوراه) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

# Estimates of Initial Coefficients in Some Subclasses of Analytic and Bi-Univalent Functions

**Dr. Hassan Baddour***
**Dr. Mohammad Ali****
**Majd Ayash*****

**(Received 9 / 5 / 2021. Accepted 16 / 8 /2021)**

## □ ABSTRACT □

In this paper, we present an estimate for the Fekete-Szegö inequality in the subclass $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ which is defined by Frasin. This estimate led to improving the bound of the third coefficient in this subclass and in the subclass $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,1)$ .

**Keywords:** Bi-univalent functions, Fekete-Szegö inequalities, Coefficient bounds.

***Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia,Syria.**

****Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia, Syria.**

*****Postgraduate Student (Ph.D), Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Latakia, Syria.**

## مقدمة:

ندرس في هذا البحث مسألة تحسين تقديرات معاملات التوابع في صف التوابع ثنائية التباين استكمالاً لعمل بعض الباحثين السابقين في كل من المراجع [5,6,7] حيث نقدم تقدير للمعامل الثالث في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ والصف الجزئي $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,1)$ مستخدمين طريقة إيجاد تقدير لمسألة " Fekete–Szegö " وحدود معاملات التوابع في صف التوابع ذات القسم الحقيقي الموجب وأيضا مطابقات خاصة مبنية على طبيعة تعريف الصف المدروس.

## أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث من كونه يُعنى في دراسة التوابع المختلفة للأسرة $\sigma$ والمعروفة بأنها أسرة التوابع ثنائية التباين من خلال دراسة خواص معاملات هذه التوابع عندما تنتمي لصفوف جزئية معينة من الأسرة $\sigma$. ويتجلى هدف هذا البحث في محاولة الحصول على أفضل تقديرات ممكنة لبعض المعاملات أو لمتراجحات فيكت شيغو أو لمحدد هانكل الثاني للتوابع في بعض الصفوف الجزئية من $\sigma$.

## طرائق البحث ومواده:

يقع هذا البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكل خاص ضمن التحليل العقدي والتوابع التحليلية والمتباينة، لذلك فالطرق المتبعة تعتمد بشــكل أساسـي على مفاهيم التحليل العقدي مثل قابلية نشـر التابع التحليلي في ســلــسلة تايلور في جوار النقطة ما , وأيضاً على منـشور ثنائي حد نيوتن – أويلر للأســس الحقيقية بمتغيرات عقدية، وبشكل عام على أدبيات نظرية التوابع المتباينه.

**تعاريف ومفاهيم أساسية**

يرمز بالرمز $\mathcal{A}$ الى مجموعة التوابع $f(z)$ التحليلية على قرص الواحدة $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ والتي تحقق الشرط $f(z)=f'(0)-1=0$ والمعروف بأنها تمثل بسلسلة تايلور ذات الشكل

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \qquad (1)$$

ويرمز بالرمز $\mathcal{S}$ لصف التوابع الجزئية من $\mathcal{A}$ والمتباينة على قرص الواحدة، ومن المعروف أنه وفقاً لنظرية الربع للباحث "Koebe" ،انظر[1]، ان كل تابع من الصف $\mathcal{S}$ مداه يحوي القرص $\{w:|w|<1/4\}$. لذلك كل تابع $f$ متباين من الصف $\mathcal{S}$ يملك معكوساً $f^{-1}$ يحقق أن $f^{-1}(f(z))=z,(z\in\mathbb{D})$ و $f(f^{-1}(w))=w$ $(|w|<r_0(f);r_0(f)\geq 1/4)$ ; وبسبب التباين يمكن لهذا المعكوس أن يعبرعنة بسلسلة قوى(تايلور) كمايلي

$$g(w)=f^{-1}(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty}b_nw^n=w-a_2w^2+(2a_2^2-a_3)w^3+(5a_2^3-5a_2a_3+a_4)w^4+\dots \qquad (2)$$

يقال عن التابع $f\in\mathcal{A}$ أنه ثنائي التباين على قرص الواحدة $\mathbb{D}$ اذا كان كل من $f$ ومعكوسه $g=f^{-1}$ متبايناً على قرص الواحدة. ويرمز بالرمز $\sigma$ الى صف التوابع ثنائية التباين على $\mathbb{D}$ ومن الأمثلة على توابع من الصف $\sigma$

$$\frac{z}{1-z}\quad,\quad -\log(1-z)\quad,\quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

يقال عن التابع $f$ من الصف $\mathcal{S}$ أنه نجمي من المرتبة $\alpha$ اذا حقق الشرط التالي

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha\quad,\quad(z\in\mathbb{D}),\ (0\leq\alpha<1).$$

ويرمز لصف التوابع النجمية من المرتبة $\alpha$ بالرمز $\mathcal{S}^*(\alpha)$ .

وأيضا يقال عن التابع $f$ من الصف $\mathcal{S}$ أنه محدب من المرتبة $\alpha$ اذا حقق الشرط التالي

$$\Re\left(1+\frac{z\acute{\acute{f}}(z)}{\acute{f}(z)}\right)>\ \alpha\quad,\quad (z\in\mathbb{D}),\ \left(0\leq\alpha<1\right).$$

ويرمز لصف التوابع المحدبة من المرتبة $\alpha$ بالرمز $\mathcal{K}(\alpha)$ . وفي حالة $\alpha=0$ يرمز بـ $\mathcal{K}$ و $\mathcal{S}^*$ لصف التوابع المحدبة وصف التوابع النجمية على الترتيب.

يقال عن التابع $f\in\sigma$ أنه من الصف $\mathcal{S}_\sigma^*(\beta)$ صف التوابع ثنائية النجمية من المرتبة $\beta$ حيث $(0\leq\beta<1)$ اذا كان كل من $f$ ومعكوسة $f^{-1}$ نجمياً من المرتبة $\beta$ . وبالمثل يقال عن التابع $f\in\sigma$ أنه من الصف $\mathcal{K}_\sigma(\beta)$ صف التوابع ثنائية التحدب من المرتبة $\beta$ حيث $(0\leq\beta<1)$ اذا كان كل من $f$ ومعكوسة $f^{-1}$ محدباً من المرتبة $\beta$، من أجل $\beta=0$ نحصل على صف التوابع ثنائية النجمية $\mathcal{S}_\sigma^*$ وصف التوابع ثنائية التحدب $\mathcal{K}_\sigma$ .

يعرف الصف $\mathcal{P}$ بانة صف التوابع $\mathscr{k}$ التحليلية على قرص الواحدة والتي تنقل قرص الواحدة الى نصف المستوي العقدي الأيمن والتي تحقق الشرط $\mathscr{k}(0)=1$ ، مثل هذه التوابع تمثل بسلسلة قوى من الشكل

$$\mathscr{k}(z)=1+\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}p_kz^k \tag{3}$$

يرمز بالرمز $H_q(n)$ لمحدد هانكل [2] لمعاملات التابع $f$ حيث نوقش هذا المحدد من قبل العديد من الباحثين من أجل $q=2\,,n=1$ الذي يعطي محدد هانكل الثاني $H_2(1)=a_3-a_2^2$ والمعروف بدالي"Fekete–Szegö" وذلك بوجود الثابت $\mu$ بالشكل $a_3-\mu a_2^2$ .

في عام 1967 الباحث Lewin [3] بين أن كل تابع $f\in\sigma$ معاملة الثاني يحقق المترجحة $|a_2|<1.51$،أيضاً في نفس العام بين الباحثان Brannan and Clunie [4] خمنا أنه من أجل $f\in\sigma$ فإن $|a_2|\leq\sqrt{2}$ . في عام 1985 أثبت الباحث Kedzierawski [5] تخمين الباحثين Brannan and Clunie [4] وذلك من أجل التوابع ثنائية النجمية $f\in\mathcal{S}_\sigma^*$ ، وفي عام 1988 حصل الباحثين Brannan and Taha [6]على تقدير لكل من المعاملين $|a_2|$ و $|a_3|$ في كل من صف التوابع ثنائية النجمية $\mathcal{S}_\sigma^*(\beta)$ وصف التوابع ثنائية التحدب $\mathcal{K}_\sigma(\beta)$ .

وفي عام 2013 حصل الباحث Murugusundaramoorthy et al. [7] على تقدير لكل من المعاملات $|a_2|$ و $|a_3|$ في كل من الصفين $\mathcal{S}_\sigma(\alpha,\lambda)$ و $\mu_\sigma(\beta,\lambda)$ الجزئيين من $\sigma$ ، وفي عام 2014 تمكن الباحث Zaprawa [8] من إيجاد تقدير لمسألة Fekete–Szegö في كل من الصفين $\mathcal{S}_\sigma(\alpha,\lambda)$ و $\mu_\sigma(\beta,\lambda)$ الأمر الذي أدى الى تحسين تقدير المعامل $|a_3|$ في كل من الصفين المعرفين في المرجع [7] ، وفي نفس العام قام الباحث Frasin [9] بتعريف الصفين $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ و $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ الجزئيين من $\sigma$ بالشكل التالي:

**تعريف 1:** يكون التابع $f\in\sigma$ من الصف $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ اذا حقق مايلي:

$$\left|arg\left(\acute{f}(z)+\beta z\acute{\acute{f}}(z)\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}\quad,\quad\left|arg\left(\acute{g}(w)+\beta w\acute{\acute{g}}(w)\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}\ ,(z,w\in\mathbb{D}) \tag{4}$$

$$g=f^{-1}\ ,\ \beta>0\ ,\ 0<\alpha<1\ ,\ 2(1-\alpha)\sum\nolimits_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{\beta m+1}\leq 1.$$

**تعريف 2:** يكون التابع $f\in\sigma$ من الصف $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ اذا حقق مايلي:

$$\Re\left(\acute{f}(z)+\beta z\acute{\acute{f}}(z)\right)>\gamma\quad,\ \Re\left(\acute{g}(w)+\beta w\acute{\acute{g}}(w)\right)>\gamma\ ,(z,w\in\mathbb{D}) \tag{5}$$

$$g = f^{-1} \ , \ \beta > 0 \ , \ 0 \le \gamma < 1 \ , \ 2(1-\gamma)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{\beta m+1} \le 1.$$

في المرجع [9] تم البرهان على الخواص الآتية:

**خاصة 1:** من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ حيث أن $\beta > 0$ و $0 < \alpha < 1$ عندئذٍ يكون

$$|a_2| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{2(\alpha+2)+4\beta(\alpha+\beta-\alpha\beta+2)}} \quad , \quad |a_3| \le \frac{\alpha^2}{(1+\beta)^2}+\frac{2\alpha}{3(1+2\beta)} \qquad (6)$$

**خاصة 2:** من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ حيث أن $\beta > 0$ و $0 \le \gamma < 1$ عندئذٍ يكون

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)}} \quad , \quad |a_3| \le \frac{(1-\gamma)^2}{(1+\beta)^2}+\frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)} \qquad (7)$$

**خاصة 3:** من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$ حيث أن $0 < \alpha < 1$ عندئذٍ يكون

$$|a_2| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{2\alpha+16}} \quad , \quad |a_3| \le \frac{9\alpha^2+8\alpha}{36}. \qquad (8)$$

**خاصة 4:** من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,1)$ حيث أن $0 \le \gamma < 1$ عندئذٍ يكون

$$|a_2| \le \frac{1}{3}\sqrt{2(1-\gamma)} \quad , \quad |a_3| \le \frac{(1-\gamma)(9(1-\gamma)+8)}{36}. \qquad (9)$$

في المرجع [1] تم اثبات الخاصة الآتية:

**خاصة 5:** ليكن التابع $\hbar$ من صف التوابع $\mathcal{P}$ حيث $\hbar(z) = 1+\sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k$ عندئذٍ

$$|p_k| \le 2 \qquad (10)$$

هو الحد الدقيق لمعاملات التوابع في الصف $\mathcal{P}$ .

## النتائج والمناقشة:

سوف نقدم فيما يلي تحسيناً للتقديرات التي وردت في هذه الخواص:

**مبرهنة 1:** ليكن $k,l \in \mathbb{R}$ و $z_1 , z_2 \in \mathbb{C}$ حيث $|z_1| \le R$ ، $|z_2| \le R$ عندئذٍ يكون :

$$|(k+l)z_1+(k-l)z_2| \le \begin{cases} 2|k|R & ,|k| \ge |l| \\ 2|l|R & ,|k| \le |l|\,. \end{cases} \qquad (11)$$

**البرهان:**

بما أن

$$|(k+l)z_1+(k-l)z_2| \le (|k+l|+|k-l|)R \qquad (12)$$

من أجل $|k| \ge |l|$ و $k \ge 0$ في العلاقة (12) نجد

$$|(k+l)z_1+(k-l)z_2| \le 2kR \qquad (13)$$

من أجل $|k| \ge |l|$ و $k \le 0$ في العلاقة (12) نجد

$$|(k+l)z_1+(k-l)z_2| \le -2kR \qquad (14)$$

من العلاقتين (13) و (14) نحصل على الفرع الأول للمترجحة (11)

من أجل $|k| \le |l|$ و $l \ge 0$ في العلاقة (12) نجد

$$|(k+l)z_1+(k-l)z_2| \le 2lR \qquad (15)$$

من أجل $|k| \le |l|$ و $l \le 0$ في العلاقة (12) نجد

$$|(k+l)z_1+(k-l)z_2| \le -2lR \tag{16}$$

من العلاقتين (15) و (16) نحصل على الفرع الثاني للمترجحة (11) .

نقدم في المبرهنة التالية تقدير لمسألة Fekete–Szegö في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ .

**مبرهنة 2:** من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ و $0 \le \gamma < 1$ و $\beta > 0$ عندئذٍ يكون

$$|a_3-\mu a_2^2| \le \begin{cases} 4h(\gamma)|1-\mu| & ,h(\gamma)|1-\mu| \ge h(\gamma) \\ 4h(\gamma) & ,h(\gamma)|1-\mu| \le h(\gamma) \end{cases} \tag{17}$$

حيث $\mu \in \mathbb{R}$ و $h(\gamma)=\frac{1-\gamma}{6(1+2\beta)}$ .

**البرهان:**

من أجل كل تابع $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ فإن العلاقات (5) تكتب بالشكل التالي:

$$f'(z)+\beta z f''(z)=\gamma+(1-\gamma)p(z) \tag{18}$$

$$g'(w)+\beta w g''(w)=\gamma+(1-\gamma)q(w) \tag{19}$$

حيث $p(z),q(w) \in \mathcal{P}$ لذلك يكون

$$\gamma+(1-\gamma)p(z)=1+p_1(1-\gamma)z+p_2(1-\gamma)z^2+\cdots \tag{20}$$

$$\gamma+(1-\gamma)q(w)=1+q_1(1-\gamma)w+q_2(1-\gamma)w^2+\cdots. \tag{21}$$

من العلاقتين (1) و (2) نجد التالي :

$$f'(z)+\beta z f''(z)=1+2a_2(1+\beta)z+3a_3(1+2\beta)z^2+\cdots \tag{22}$$

$$g'(w)+\beta w g''(w)=1-2a_2(1+\beta)w+3(2a_2^2-a_3)(1+2\beta)w^2+\cdots \tag{23}$$

ومن العلاقات (18) و (20) و (22) نجد أن :

$$2a_2(1+\beta)=p_1(1-\gamma) \tag{24}$$

$$3a_3(1+2\beta)=p_2(1-\gamma). \tag{25}$$

وأيضاً من العلاقات (19) و (21) و (23) نجد أن :

$$-2a_2(1+\beta)=q_1(1-\gamma) \tag{26}$$

$$3(2a_2^2-a_3)(1+2\beta)=q_2(1-\gamma) \tag{27}$$

من العلاقتين (24) ، (26) نجد أن:

$$p_1=-q_1 \tag{28}$$

بجمع العلاقتين (25) ، (27) نجد أن:

$$a_2^2=\frac{(p_2+q_2)(1-\gamma)}{6(1+2\beta)} \tag{29}$$

بطرح العلاقة (27) من العلاقة (25) نجد أن :

$$6a_3(1+2\beta)-6a_2^2(1+2\beta)=(p_2-q_2)(1-\gamma) \tag{30}$$

من العلاقتين (29) و (30) نجد أن:

$$a_3=\frac{(p_2+q_2)(1-\gamma)}{6(1+2\beta)}+\frac{(p_2-q_2)(1-\gamma)}{6(1+2\beta)} \tag{31}$$

من العلاقتين (29) و (31) نحصل على

$$a_3-\mu a_2^2=(p_2+q_2)h(\gamma)+(p_2-q_2)h(\gamma)-\mu(p_2+q_2)h(\gamma) \tag{32}$$

$$a_3-\mu a_2^2=p_2[h(\gamma)(1-\mu)+h(\gamma)]+q_2[h(\gamma)(1-\mu)-h(\gamma)] \tag{33}$$

بتطبيق التمهيدية 5 والمبرهنة 1 على العلاقة (33) يتم البرهان.

**مبرهنة 3:** من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ و $0 \le \gamma < 1$ و $\beta > 0$ عندئذٍ يكون

$$|a_3| \le \frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)} \tag{34}$$

**البرهان:**

وفقاً للمبرهنة 2 لدينا $\mu \in \mathbb{R}$ و $h(\gamma) = \frac{1-\gamma}{6(1+2\beta)}$

بوضع $\mu = 0$ في العلاقة (17) نجد أن :

$$|a_3| \le 4h(\gamma) \tag{35}$$

بذلك يتم البرهان.

**مبرهنة 4:** من أجل $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma,1)$ و $0 \le \gamma < 1$ عندئذٍ يكون:

$$|a_3| \le \frac{2(1-\gamma)}{9} \tag{36}$$

**البرهان:**

وفقاً للمبرهنة 2 لدينا

$$h(\gamma) = \frac{1-\gamma}{6(1+2\beta)} \tag{37}$$

بوضع $\beta = 1$ نجد أن

$$h(\gamma) = \frac{1-\gamma}{18} \tag{38}$$

بالتعويض في العلاقة (35) يتم المطلوب.

**ملاحظة** : بمقارنة التقدير للمعامل $|a_3|$ الذي توصلنا له في كل من المبرهنتين (3) و (4) مع التقدير لهذا المعامل في كل من الخاصتين (2) و (4) نجد أن تقديرنا يحسن النتائج المذكورة في المرجع [9] والمتمثلة بالخاصتين (2) و (4) .

## الاستنتاجات والتّوصيات:

توصلنا في هذه المقالة الى تقدير لمسألة Fekete–Szegö في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ وأيضا تقدير للمعامل $|a_3|$ في كل من الصفين $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,\beta)$ و $\mathcal{H}_\sigma(\gamma,1)$ وهذا التقدير يحسن النتائج المقدمة في المرجع [9] .

ونوصي بمحاولة إيجاد تقدير لمسألة Fekete–Szegö في الصف $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ وأيضا تقدير للمعامل $|a_3|$ في كل من الصفين $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,\beta)$ و $\mathcal{H}_\sigma(\alpha,1)$ بحيث يحسن النتائج المقدمة في بالخاصتين (1) و (3) .

## References:

[1] P. L. DUREN, *Univalent functions, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 259, Springer, New York,1983.

[2] J.W. NOONAN AND D.K. THOMAS, *On the second Hankel determinant of a really mean p-valent functions,Trans*. Amer. Math. Soc., 223(2) (1976), 337-346.

[3] M. LEWIN, *On a coefficient problem for bi-univalent functions*, Proc. Amer. Math Soc. 18 (1967), 63-68.

[4] A. BRANNAN AND J. G. CLUNIE, *Aspects of contemporary complex analysis Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham*, July 120, 1979, Academic Press New York, London,1980.
[5] A. W. KEDZIERAWSKI, *Some remarks on bi-univalent functions,* Ann. Univ.Mariae CurieSk lodowska Sect. A 39 (1985), 77-81 (1988).
[6] D.A. BRANNAN AND T.S. TAHA, *On some classes of bi-univalent functions,* in: S.M.Mazhar, A. Hamoui, N.S. Faour (Eds.), Math. Anal. and Appl., Kuwait; February 18-21, 1985, in: KFAS Proceedings Series, vol. 3, Pergamon Press, Elsevier Science Limited, Oxford, 1988, pp. 53{60. see also Studia Univ. Babes-Bolyai Math. 31 (2) (1986), 70-77.
[7] G. MURUGUSUNDARAMOORTHY, N. MAGESH, AND V. PRAMEELA, *Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent function*, *Abstract and Applied Analysis*,vol. 2013, Article ID 573017, 3 pages, 2013.
[8] P. ZAPRAWA, *Estimates of initial coe_cients for bi-univalent functions*, Abstr.Appl. Anal., 2014, Article ID 357480, 6 pages.
[9] B.A. FRASIN, *Coefficient bounds for certain classes of bi-univalent functions,* Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics ,Vol 43 (3) (2014), 383 - 389