تصنيف زمر الصّفوف من الرّتبة 4 للحقل $\mathbb{Q}\left(\sqrt{n^{2}+4}\right)$

د. حسن سنكري*

أحمد عيسى **

(تاريخ الإيداع 14 / 6 / 2020. قُبِل للنشر في 29 / 3 /2021)

ملخّص

درسنا في هذا البحث إحدى المسائل الهامّة وهي مسألة تصنيف زمر الصّفوف تبعاً للرتبة، وبشكل خاص درسنا تصنيف زمر الصّفوف من الرّتبة 4 لأسرة من الحقول التّربيعيّة الحقيقيّة $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ حيث $d=n^{2}+4$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع وذلك بالإعتماد على تحليل الإيديال الرّئيسيّ $\langle p\rangle$ في الحقل k حيث p عدد أوّليّ فرديّ يَقْسِم n ، وحد أدنى لعدد صفوف الحقل k، بالإضافة إلى مفهوم صفّ التّابع زيتا ومجموع ديدكند المعمّم.

الكلمات المفتاحيّة: الحقول التّربيعيّة الحقيقيّة، تصنيف زمر الصّفوف، صفّ التّابع زيتا، مجموع ديدكند المعمّم.

*أستاذ مساعد– قسم الرّياضيات– كليّة العلوم– جامعة تشرين– اللّاذقية– سورية.

**طالب دراسات عليا (دكتوراه)– قسم الرّياضيات– كليّة العلوم– جامعة تشرين– اللّاذقية– سورية.

A CLASSIFICATION OF ORDER 4 CLASS GROUPS OF $\mathbb{Q}\left(\sqrt{n^2+4}\right)$

Dr. Hasan Sankari *
Ahmad Issa **

(Received 14 / 6 / 2020. Accepted 29 / 3 /2021)

□ ABSTRACT □

In this paper, we have studied one of the important problems which is the classification of class groups according to the order. Especially, we have studied the classification of order 4 class groups of the family of real quadratic fields $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ where $d=n^2+4$ is a positive squarefree integer, depending on the factor of the principal ideal $\langle p\rangle$ in k where p is an odd prime divides n, and a lower bound for the class number of k. In addition, the concept of class zeta function and generalized Dedekind sum.

Keywords: Real quadratic fields, Classification of class groups, Class zeta function, Generalized Dedekind sum.

*** Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
****Postgraduate Student (Ph.D), Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدّمة:

مجموعة زمر صفوف تكافؤ الإيديالات(واختصاراً زمر الصّفوف) ذات الرّتبة n (في الحالة العامة) يمكن اعتبارها مجموعة غير منتهية. وبالتّالي ليس من المعقول لدراسة هذه الزّمر أن ندرس كل زمرة على حدى. من هنا نجد أنّه لتصنيف الزّمر من حيث الرّتبة له أهميّة كبيرة.

Chakraborty وآخرون ([7,2020],[6,2019]) استخدموا صف التّابع زيتا ومجموع ديدكند المعمّم لدراسة حد أدنى لرتبة زمرة صّفوف الحقل$\mathbb{Q}\left(\sqrt{n^{2}+1}\right)$ واعتمدوا على الحد الأدنى في دراسة تصنيف زمر الصّفوف من الرّتبة 4 للحقل $\mathbb{Q}\left(\sqrt{n^{2}+1}\right)$. أمّا نحن في هذا البحث سندرس تصنيف زمر الصّفوف من الرّتبة 4 للحقل $\mathbb{Q}\left(\sqrt{n^{2}+4}\right)$ مستخدمين صف التّابع زيتا ومجموع ديدكند المعمّم.

أهميّة البحث وأهدافه:

من المعروف من نظريّة الزّمر أنّ الزّمر ذات الرّتبة 4 تكون إيزومرفية لـ $\mathbb{Z}_4$ أو لـ $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. فهذا البحث يهدف إلى دراسة تصنيف زمر الصّفوف من الرّتبة 4 للحقل التّربيعيّ $\mathbb{Q}\left(\sqrt{n^{2}+4}\right)$ أي البحث عن الشّروط الواجب تحقّقها حتّى تكون زمر الصّفوف من الرّتبة 4 إيزومرفية لـ $\mathbb{Z}_4$ ومتى إيزومرفية لـ$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. وتكمن أهميّة التّصنيف في أنّه يسهم في تبسيط الدّراسات وتسهيلها في كثير من الأحيان وذلك من كون زمر الصّفوف الإيزمورفية لـ $\mathbb{Z}_4$ أو لـ $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ يمكن اعتبارها زمرة واحدة. فدراسة زمرة واحدة تكفي لدراسة صفّ من الزّمر.

طرائق البحث وموادّه:

في هذا البحث نستفيد من تحليل الإيديال الرّئيسيّ $\langle p\rangle$ في الحقل $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{n^{2}+4}\right)$، وحد أدنى لعدد صفوف الحقل k ومن صف التّابع زيتا ومجموع ديدكند المعمّم.

تعاريف ومفاهيم أساسيّة:

بعض الرّموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث:

- $\mathcal{O}_k$ حلقة الأعداد الجبريّة الصّحيحة للحقل k.
- C_k زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات للحقل k واختصاراً زمرة الصّفوف للحقل k .
- $h(d)$ رتبة الزّمرة C_k للحقل$k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$.
- $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ رمز ليجندر.
- $\zeta_k(s,\mathrm{H})$ صف التّابع زيتا حيث $\mathrm{H}\in C_k$.
- $\omega(n)$ عدد القواسم الأوّليّة الفرديّة لـ n.

نذكر فيما يأتي بعضاً من التّعاريف والتّمهيديات والأفكار التي اعتمدنا عليها في هذا البحث.

تعريف1:[1,3]

ليكن $d\neq 0,1$ عدداً صحيحاً حرّاً من التّربيع، يُعرّف الحقل التّربيعيّ$k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ بالشّكل:

$$k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)=\left\{a+b\sqrt{d}\;;\;a,b\in\mathbb{Q}\right\}$$

حيث $\mathbb{Q}$ حقل الأعداد الكسريّة.

وإذا كان $d > 0$ فإنّ k يّسمّى حقلاً تربيعيّاً حقيقيّاً(Real quadratic field)، وإذا كان $d < 0$ فإنّ k يّسمّى حقلاً تربيعيّاً تخيّلياً(Complex quadratic field)، وتُسمّى عناصر الحقل التّربيعيّ أعداداً تربيعيّة (Quadratic numbers).

وتُعرّف حلقة الأعداد الجبريّة الصّحيحة O_k في الحقل $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ بالشّكل التّالي:

$$O_k = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \;; & d \not\equiv 1 \ (mod\ 4), \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]; & d \equiv 1 \ (mod\ 4). \end{cases}$$

أما مميّز الحقل $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ فهو يُعطى بالشّكل التّالي:

$$D(k) = \begin{cases} 4d; & d \not\equiv 1 \ (mod\ 4), \\ d; & d \equiv 1 \ (mod\ 4). \end{cases}$$

تعريف2:[1]

ليكن $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$

يُعرّف مرافق α (Conjugate of α)، ويرمز له بالرّمز $\acute{\alpha}$، بالشّكل:

$$\acute{\alpha} = a - b\sqrt{d}$$

ويُعرّف نظيم α (Norm of α)، ويرمز له بالرّمز $N(\alpha)$، بالشّكل:

$$N(\alpha) = \alpha\acute{\alpha} = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$$

ويُعرّف أثر α (Trace of α)، ويرمز له بالرّمز $Tr(\alpha)$، بالشّكل:

$$Tr(\alpha) = \alpha + \acute{\alpha} = 2a$$

تعريف3:[8]

ليكن k حقلاً تربيعيّاً، عندئذٍ زمرة الواحدات في الحلقة O_k تُعطى بالصّيغة التّالية:

$$O_k^{\times} = \{\alpha \in O_k \,; |N(\alpha)| = 1\}$$

وفي حال k حقلاً تربيعيّاً حقيقيّاً عندئذٍ أصغر واحدة في $O_k^{\times}$ أكبر تماماً من 1 تُسمّى الواحدة الأساسيّة للحقل k، ويرمز لها بالرّمز ε .

تعريف4:[5]

الحقل التّربيعيّ الحقيقيّ $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ يُسمّى حقلاً تربيعيّاً حقيقيّاً من النّمط Richaud-Degert(R-D) إذا حقّق الشّروط التّالية:

1. $d = n^2 + r \neq 5$ عدداً صحيحاً موجباً حرّاً من التّربيع.
2. $r \mid 4n$.
3. $-n < r \leq n$.

تمهيديّة1:[5]

ليكن $k = \mathbb{Q}(\sqrt{n^2 + r})$ حقل تربيعيّ حقيقيّ من النّمط Richaud-Degert(R-D) عندئذٍ الواحدة الأساسيّة ε ونظيمها $N(\varepsilon)$ تُعطى في الحالات التّالية كما يلي:

$$\varepsilon = n + \sqrt{n^2 + r} \quad ,N(\varepsilon) = -sgn\ r \quad if\ |r| = 1$$
$$\varepsilon = \frac{n + \sqrt{n^2 + r}}{2} \quad ,N(\varepsilon) = -sgn\ r \quad if\ |r| = 4$$
$$\varepsilon = \frac{2n^2 + r}{|r|} + \frac{2n}{|r|}\sqrt{n^2 + r} \ ,N(\varepsilon) = 1 \quad if\ |r| \neq 1,4$$

تعريف5:[1]

لتكن D ساحة صحيحة و k حقل نسب D عندئذٍ المجموعة P الجزئيّة وغير الخالية من k والمحققة للشّروط التّالية:

1. $\forall \alpha, \beta \in P \ \Rightarrow \alpha + \beta \in P$
2. $\forall \alpha \in P \ \wedge r \in D \Rightarrow r\alpha \in P$
3. يوجد $0 \neq \lambda \in D$ بحيث $\lambda P \subseteq D$

تُسمّى إيديال كسريّ (Fractional ideal) في D.

وإذا كانت المجموعة P جزئيّة وغير خالية من D وتحقّق الشّروط الثّلاثة السّابقة عندئذ P يُسمّى إيديال صحيح (Integral ideal) في D.

تعريف6:[1,8]

ليكن k حقلاً تربيعيّاً و $\mathcal{O}_k$ حلقة الأعداد الجبريّة الصّحيحة للحقل k.

❖ $\{\xi_1, \xi_2\}$ قاعدة للإيديال الصحيح I إذا كان كل عنصر α من I يعبر عنه بشكل وحيد بالشكل

$$\alpha = x_1\xi_1 + x_2\xi_2, \dots . + x_2\xi_n \ ; \ x_1, x_2, \dots ., x_2 \in \mathbb{Z}$$

❖ يُعرّف نظيم الإيديال الصّحيح I في $\mathcal{O}_k$ بالشّكل التّالي:

$$N(\mathrm{I}) = Card\left({}^{\mathcal{O}_k}/_{\mathrm{I}}\right) = (\mathcal{O}_k : \mathrm{I})$$

حيث $(\mathcal{O}_k : \mathrm{I})$ هو دليل الزّمرة الجزئيّة I في $\mathcal{O}_k$.

وإذا كان I, P إيديالين صحيحين في $\mathcal{O}_k$ عندئذٍ $N(\mathrm{IP}) = N(\mathrm{I})N(\mathrm{P})$.

تمهيديّة2:[1]

ليكن $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقلاً تربيعيّاً

1. $d \not\equiv 1 \ (mod\ 4)$.

ولتكن a, b, c أعداد صحيحة بحيث $a \neq 0$، $c \neq 0$، عندئذٍ

a) $\{a, b + c\sqrt{d}\}$ قاعدة للإيديال الصّحيح $\langle a, b + c\sqrt{d}\rangle$ إذا وفقط إذا كان $c \mid a$، $c \mid b$، $ac \mid b^2 - dc^2$.

b) إذا كان $c \mid a$، $c \mid b$، $ac \mid b^2 - dc^2$ عندئذٍ $N(\langle a, b + c\sqrt{d}\rangle) = |ac|$.

2. $d \equiv 1 \ (mod\ 4)$.

ولتكن a, b, c أعداد صحيحة بحيث $a \neq 0$، $c \neq 0$ و $b \equiv c \ (mod\ 2)$ عندئذ

c) $\left\{a, \frac{b + c\sqrt{d}}{2}\right\}$ قاعدة للإيديال الصّحيح $\langle a, \frac{b + c\sqrt{d}}{2}\rangle$ إذا وفقط إذا كان $c \mid a$، $c \mid b$، $4ac \mid b^2 - dc^2$.

d) إذا كان $a \mid c$، $b \mid c$، $4ac \mid b^2 - dc^2$ عندئذٍ $N\left(\langle a, \frac{b+c\sqrt{d}}{2}\rangle\right) = |ac|$.

❖ هناك تعريف لزمرة صفوف تكافؤ الإيديالات في حقول الأعداد الجبريّة بشكل عام [1]، ولكن معظم الدّراسات تدرس مسألة رتبة زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات في حقول الأعداد التّربيعيّة، لذلك سنقدم الآن تعريف زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات للحقول التّربيعيّة.

تعريف7:[1]

ليكن $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقل تربيعيّ و $\mathcal{O}_k$ حلقة الأعداد الجبريّة الصّحيحة للحقل k. تُعرّف زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات C_k للحقول التّربيعيّة بالشكل التالي

$$C_k = {}^{I(k)}\Big/_{P(k)} = \{\mathfrak{a}P(k)\ ;\ \mathfrak{a} \in I(k)\} = \{[\mathfrak{a}]\ ;\ \mathfrak{a} \in I(k)\}$$

حيث $I(k)$ زمرة الإيديالات الكسريّة المختلفة عن الصّفر في $\mathcal{O}_k$ و $P(k)$ زمرة الإيديالات الكسرية الرّئيسيّة في $I(k)$، والعملية المعرفة على C_k هي جداء الصفوف.

C_k زمرة تبديليّة وتُسمّى بزمرة صفوف تكافؤ الإيديالات (Ideal class group) واختصاراً زمرة الصّفوف للحقل k، العنصر الحياديّ في C_k هو $P(k) = \mathcal{O}_k P(k) = [\mathcal{O}_k] = [\langle 1\rangle]$ ويُسمّى بصف الإيديال الرّئيسيّ للحقل k، وسنرمز لهذا الصّف بـ A ولبقية الصّفوف في هذه الزّمرة بالرّموز ... B, C, D, E, H.

ولقد برهن Hermann minkowski (1864−1909) بعد سلسلة من النّظريات أنّ الزّمرة C_k منتهية. ولنرمز لرتبة هذه الزّمرة بـ $h(d)$ ومن جهة أخرى $h(d)$ تُعبر عن عدد صفوف الحقل k.

تعريف8:[8]

ليكن $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d = n^2 + 4$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع، عندئذ يُعرّف التّابع زيتا ديدكند للحقل k بالشّكل:

$$\zeta_k(s) = \sum_{I \in J_k} \frac{1}{(N(I))^s}$$

حيث J_k مجموعة كلّ الإيديالات الصّحيحة المختلفة عن الصّفر في $\mathcal{O}_k$.

ويُعرّف صف التّابع زيتا $\zeta_k(s, \mathrm{H})$ حيث $\mathrm{H} \in C_k$ بالصّيغة التّالية:

$$\zeta_k(s, \mathrm{H}) = \sum_{I \in J_k\ ;[I] = H} \frac{1}{(N(I))^s}$$

حيث أنّ المجموع مأخوذ من أجل جميع الإيديالات الصّحيحة المختلفة عن الصّفر في $\mathcal{O}_k$ والواقعة في الصّف H.

تعريف9:[11]

أعداد برنولي B_n حيث $n \in \mathbb{N}$، تُعطى من العلاقة

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0\ ; B_0 = 1\ \&\ n \geq 2$$

تعريف10:[11]

كثيرات حدود برنولي $B_n(x)$ حيث $n \in \mathbb{N}$ تُعطى بالصّيغة التّالية:

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$$

حيث B_k أعداد برنولي.

تعريف11:[2]

ليكن h,k أعداد صحيحة، $k>0$ و $gcd(h,k)=1$ عندئذ يُعرّف مجموع ديدكند المعمّم $S_{2n}^{(m)}(h,k)$ حيث $n\in\mathbb{N}$، $m=\overline{0,2n}$ ، بالصّيغة التّالية:

$$S_{2n}^{(m)}(h,k)=\sum\nolimits_{\mu \bmod k} B_m\left(\frac{h\mu}{k}-\left[\frac{h\mu}{k}\right]\right)B_{2n-m}\left(\frac{\mu}{k}-\left[\frac{\mu}{k}\right]\right)$$

حيث $[r]$ دالّة الجزء الصّحيح للعدد r و $B_r(x)$ كثيرات حدود برنولي.

وفي حالة $n=2$ نحصل على $S_4^{(m)}(h,k)$ واختصاراً $S^m(h,k)$

$$S^m(h,k)=S_4^{(m)}(h,k)=\sum\nolimits_{\mu \bmod k} B_m\left(\frac{h\mu}{k}-\left[\frac{h\mu}{k}\right]\right)B_{4-m}\left(\frac{\mu}{k}-\left[\frac{\mu}{k}\right]\right)$$

تمهيديّة3:[5,9]

ليكن k عدد صحيح موجب عندئذٍ

1. $S^3(\pm1,k)=\pm\frac{-k^4+5k^2-4}{120k^3}$
2. $S^2(\pm1,k)=\frac{k^4+10k^2-6}{180k^3}$

تمهيديّة4:[4]

ليكن $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ حقلاً تربيعياً حقيقيّاً مميّزه $D(k)$. وليكن $\mathrm{H}\in C_k$، وليكن $\mathrm{I}\in\mathrm{H}^{-1}$ إيديال صحيح يملك القاعدة $\{r_1,\, r_2\}$، نضع $\delta(\mathrm{I})=r_1\, r_2'-r_1'\, r_2$ حيث r_1' و r_2' مرافقات r_1 و r_2 على الترتيب ولتكن ε الواحدة الأساسيّة للحقل k عندئذ $\{\varepsilon r_1,\, \varepsilon r_2\}$ قاعدة للإيديال I عندئذٍ

$$\varepsilon\begin{bmatrix} r_1\\ r_2\end{bmatrix}=\mathrm{M}\,.\begin{bmatrix} r_1\\ r_2\end{bmatrix}$$

حيث $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ مصفوفة عناصرها أعداد صحيحة.

تمهيديّة5:[4]

عناصر المصفوفة M تُعطى بالصّيغة التّالية

$$a=Tr\left(\frac{r_1 r_2'\varepsilon}{\delta(\mathrm{I})}\right),\quad b=Tr\left(\frac{r_1 r_1'\varepsilon'}{\delta(\mathrm{I})}\right)$$
$$c=Tr\left(\frac{r_2 r_2'\varepsilon}{\delta(\mathrm{I})}\right),\quad d=Tr\left(\frac{r_1 r_2'\varepsilon'}{\delta(\mathrm{I})}\right).$$

وأكثر من ذلك $\det\mathrm{M}=N(\varepsilon)$ و $bc\neq0$.

تمهيديّة6:[4,10]

بالحفاظ على الرّموز المذكورة في التّمهيديّة4، نحصل على صيغة Lang لحساب $\zeta_k(-1,\mathrm{H})$.

$$\zeta_k(-1,\mathrm{H})=\frac{\left(sgn\ \delta(\mathrm{I})\right)r_2 r_2'}{360\,N(\mathrm{I})c^3}\{(a+d)^3-6(a+d)N(\varepsilon)$$

$$-240c^3(sgn\ c)S^3(a,c)+180ac^3(sgn\ c)S^2(a,c)$$
$$-240c^3(sgn\ c)S^3(d,c)+180dc^3(sgn\ c)S^2(d,c)\},$$

حيث $N(\mathrm{I})$ نظيم الإيديال I و $N(\varepsilon)$ نظيم الواحدة الأساسيّة ε و $sgn\ r$ إشارة r.

تمهيديّة7:[5]

ليكن $k=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقل تربيعيّ حقيقيّ من النّمط Richaud-Degert(R-D)، و A صفّ الإيديال الرئيسي للحقل k و $d=n^2+r\equiv 1\ (mod\ 4)$ عندئذٍ

1) $|r|\neq 1,4$

$$\zeta_k(-1,A)=\begin{cases}\dfrac{2n^3(r^2+1)+n(3r^3+50r^2+3r)}{720r^2} & if\ n\ even\\ \dfrac{2n^3(r^2+16)+n(3r^3+20r^2+48r)}{720r^2} & if\ n\ odd\end{cases}$$

2) $|r|=4$ (بالتّالي n فرديّ)

$$\zeta_k(-1,A)=\begin{cases}\dfrac{n^3+11n}{360} & if\ r=4\\ \dfrac{n^3-n}{360} & if\ r=-4\end{cases}$$

3) $|r|=1$ (بالتالي $r=1$ و n زوجيّ)

$$\zeta_k(-1,A)=\frac{n^3+14n}{360}$$

تمهيديّة8:[12]

ليكن $k=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d=n^2+4$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع، وليكن p عدد أوّليّ فرديّ بحيث $p\mid n$، وليكن C صفّ إيديال ينتمي إليه $\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$ أو $\langle p,\frac{p+2-\sqrt{d}}{2}\rangle$ عندئذٍ

$$\zeta_k(-1,\mathrm{C})=\frac{n^3+n(p^4+10p^2)}{360p^2}.$$

تمهيديّة9:[12]

ليكن $k=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d=n^2+4$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع، $\omega(n)\geq 3$ عندئذٍ $h(d)\geq\omega(n)+1.$

تعريف12:[3]

إذا كان p عدداً أوّلياً فرديّاً و a عدداً صحيحاً، فإنّ الرّمز $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ يسمّى رمز ليجندر، وهو يرمز للتّابع:

$$\left(\frac{\cdot}{p}\right):\mathbb{Z}\longrightarrow\{-1,0,1\}$$

المعرّف بالشّكل:

$$\left(\frac{\cdot}{p}\right)(a)=\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1 & if\ a\ is\ a\ quadratic\ residue\ modulo\ p\\ -1 & if\ a\ is\ not\ a\ quadratic\ residue\ modulo\ p\\ 0 & if\ p\mid a\end{cases}$$

تمهيديّة10:[3]

ليكن p عدداً أوّليّاً فرديّاً و $a,b\in\mathbb{Z}$ عندئذٍ:

1. إذا كان $a \equiv b(mod\, p)$ فإنّ $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{b}{p}\right)$.
2. $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.
3. $\left(\frac{a^2}{p}\right)=1$ إذا كان $p \nmid a$.

تعريف13:[1]

ليكن k حقل تربيعيّ عندئذ العدد الأوّليّ p يتحلّل في الحقل k إذا كان $\langle p\rangle = P_1P_2$ حيث P_1, P_2 إيدياليين أوليّين مختلفين في $\mathcal{O}_k$ و $N(P_1)=N(P_2)=p$

تمهيدية11:[1]

ليكن k حقل تربيعيّ مميّزه $D(k)$ و p عدد أوّليّ فرديّ عندئذٍ

p يتحلّل في الحقل k إذا وفقط إذا كان $\left(\frac{D(k)}{p}\right)=1$

تعريف14:[8]

ليكن d مميز تربيعي و $\mathfrak{a}_i=\langle a_i, \frac{b_i+\sqrt{d}}{2}\rangle$ إيدياليين حيث $i\in\{1,2\}$ ، $a_i\in\mathbb{N}$, $b_i\in\mathbb{Z}$ و $\gcd\left(a_1,a_2,\frac{b_1+b_2}{2}\right)=1$.

يعرّف جداء الإيداليين $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, بالشكل التالي

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2=\langle a_1a_2,\frac{b+\sqrt{d}}{2}\rangle$$

حيث b عدد صحيح يحقق $b\equiv b_i\ (mod\ 2a_i)$ من أجل $i\in\{1,2\}$.

النّتائج والمناقشة:

مبرهنة1:

ليكن $k=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d=n^{2}+4$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع، وليكن p عدد أوّليّ فرديّ بحيث $p^t \mid n$ حيث $t\in\mathbb{N}$ عندئذٍ

1. $\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle^m=\langle p^m,\frac{p^m+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$
2. $\langle p,\frac{p+2-\sqrt{d}}{2}\rangle^m=\langle p^m,\frac{p^m+2-\sqrt{d}}{2}\rangle$

حيث $1\le m\le t$

الإثبات:

لدينا $\langle p^m,\frac{p^m+2-\sqrt{d}}{2}\rangle, \langle p^m,\frac{p^m+2+\sqrt{d}}{2}\rangle, \langle p,\frac{p+2-\sqrt{d}}{2}\rangle, \langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$ إيديالات صحيحة في $\mathcal{O}_k$.

إثبات1:

الخّاصة المطلوب إثباتها $\mathrm{E}(m)$ هي:

$$\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle^m=\langle p^m,\frac{p^m+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$$

سنثبتها بالاستقراء الرياضي

- عندما $m = 1$ نجد

$$\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle^1 = \langle p^1,\frac{p^1+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$$

والعلاقة صحيحة

- نفرض أنّ العلاقة صحيحة من أجل m أي

$$\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle^m = \langle p^m,\frac{p^m+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$$

- لنثبت صحّة العلاقة من أجل $m+1$ أي لنثبت أنّ

$$\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle^{m+1} = \langle p^{m+1},\frac{p^{m+1}+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$$

$$\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle^{m+1} = \langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle^m \langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$$

$$= \langle p^m,\frac{p^m+2+\sqrt{d}}{2}\rangle \langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$$

وبما أنّ $\langle p^m,\frac{p^m+2+\sqrt{d}}{2}\rangle \langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle = \langle p^{m+1},\frac{p^{m+1}+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$ وذلك حسب التعريف 14 عندئذٍ $\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle^{m+1} = \langle p^{m+1},\frac{p^{m+1}+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$ وهو المطلوب.

إثبات2:

يتم بنفس طريقة إثبات1.

مبرهنة2:

ليكن $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d = n^2 + 4$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع، وليكن p عدد أوّليّ فرديّ بحيث $p \mid n$ عندئذٍ:

$$\langle p \rangle = \langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle \langle p,\frac{p+2-\sqrt{d}}{2}\rangle$$

الإثبات:

لدينا $d = n^2 + 4$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع عندئذٍ n فرديّ وبالتّالي $n^2 \equiv 1 \ (mod\ 8)$ عندئذٍ $d \equiv 5 \ (mod\ 8)$ وبالتّالي $d \equiv 1 \ (mod\ 4)$ عندئذٍ مميّز الحقل k هو $D(k) = d$ بالإعتماد على التّعريف1.

لدينا $p \mid n$ عندئذٍ

$$n \equiv 0 \ (mod\ p) \Longrightarrow n^2 \equiv 0 \ (mod\ p) \Longrightarrow d = n^2 + 4 \equiv 4 \ (mod\ p)$$

وبالتّالي حسب التمهيديّة10 نجد

$$\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{4}{p}\right) = 1$$

عندئذٍ $\left(\frac{D(k)}{p}\right) = 1$ وبالإعتماد على التّمهيديّة11 نجد بأنّ p قابل للتحليل في الحقل k.

ولنبيّن الآن أنّ $\langle p\rangle = \langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle\langle p,\frac{p+2-\sqrt{d}}{2}\rangle$

$$\langle p,\tfrac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle\langle p,\tfrac{p+2-\sqrt{d}}{2}\rangle = \langle p^2, p\left(\tfrac{p+2+\sqrt{d}}{2}\right), p\left(\tfrac{p+2-\sqrt{d}}{2}\right), \tfrac{(p+2)^2-d}{4}\rangle = \langle p\rangle \mathrm{J}$$

حيث

$$\mathrm{J} = \langle p, \frac{p+2+\sqrt{d}}{2}, \frac{p+2-\sqrt{d}}{2}, \frac{(p+2)^2-d}{4p}\rangle$$

نلاحظ بأنّ $\gcd\left(p,\frac{(p+2)^2-d}{4p}\right)=1$ لأنّه لو كان $\gcd\left(p,\frac{(p+2)^2-d}{4p}\right)=p$

عندئذٍ p يَقْسِم العدد الصّحيح $\frac{(p+2)^2-d}{4p}$ وبالتّالي $p^2 \mid ((p+2)^2-d)$

$$p^2 \mid (p^2+4p+4-n^2-4) \Rightarrow p^2 \mid (p^2+4p-n^2) \Rightarrow p^2 \mid 4p \Rightarrow p \mid 4$$

وهذا مرفوض.

بما أنّ $\gcd\left(p,\frac{(p+2)^2-d}{4p}\right)=1$ عندئذٍ يوجد $x,y\in\mathbb{Z}$ بحيث

$$1 = xp + y\left(\frac{(p+2)^2-d}{4p}\right)\in \mathrm{J}$$

وهذا يعطينا $\mathrm{J} = \langle 1\rangle$

بالتّالي $\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle\langle p,\frac{p+2-\sqrt{d}}{2}\rangle = \langle p\rangle\mathrm{J} = \langle p\rangle\langle 1\rangle = \langle p\rangle$

مبرهنة3:

ليكن $k=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d=n^2+4$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع، وليكن p عدد أوّليّ فرديّ بحيث $p^2 \mid n$، وليكن C صفّ إيديال ينتمي إليه $\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$ أو $\langle p,\frac{p+2-\sqrt{d}}{2}\rangle$ عندئذٍ

$$\zeta_k(-1,\mathrm{C}^2) = \frac{n^3+n(p^8+10p^4)}{360p^4}$$

الإثبات:

ليكن C صفّ إيديال ينتمي إليه $\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$ أو $\langle p,\frac{p+2-\sqrt{d}}{2}\rangle$. نلاحظ بالإعتماد على المبرهنة1 أنّ $\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle^2 = \langle p^2,\frac{p^2+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$ و $\langle p,\frac{p+2-\sqrt{d}}{2}\rangle^2 = \langle p^2,\frac{p^2+2-\sqrt{d}}{2}\rangle$.

عندئذٍ C^2 صفّ إيديال ينتمي إليه $\langle p^2,\frac{p^2+2+\sqrt{d}}{2}\rangle$ أو $\langle p^2,\frac{p^2+2-\sqrt{d}}{2}\rangle$.

لنفرض أنّ $\mathrm{I}=\langle p^2,\frac{p^2+2+\sqrt{d}}{2}\rangle\in(\mathrm{C}^2)^{-1}$ وبما أنّ $\left\{r_1=\frac{p^2+2+\sqrt{d}}{2}, r_2=p^2\right\}$ قاعدة للإيديال الصحيح I حسب التّمهيديّة2، عندئذٍ $\delta(\mathrm{I})=p^2\sqrt{d}$ وذلك بالإعتماد على التّمهيديّة 4.

نعلم من التّمهيديّة1 أنّ $\varepsilon=\frac{n+\sqrt{d}}{2}$ و $N(\varepsilon)=-1$.

باستخدام التّمهيديّة 5 نجد:

$$a = Tr\left(\frac{r_1 r_2' \varepsilon}{\delta(\mathrm{I})}\right) = \frac{n+p^2}{2}+1$$

$$b = Tr\left(\frac{r_1 \acute{r}_1 \acute{\varepsilon}}{\delta(\mathrm{I})}\right) = \frac{d-(p^2+2)^2}{4p^2}$$

$$c = Tr\left(\frac{r_2 \acute{r}_2 \varepsilon}{\delta(\mathrm{I}\,)}\right) = p^2$$

$$d = Tr\left(\frac{r_1 \acute{r}_2 \acute{\varepsilon}}{\delta(\mathrm{I}\,)}\right) = \frac{n-p^2}{2} - 1$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n+p^2}{2}+1 & \frac{d-(p^2+2)^2}{4p^2} \\ p^2 & \frac{n-p^2}{2}-1 \end{pmatrix}$$

نلاحظ بأنّ عناصر المصفوفة M أعداد صحيحة.

$$S^3\left(\frac{n+p^2}{2}+1, p^2\right) = \sum\nolimits_{\mu \bmod p^2} B_3\left(\frac{\left(\frac{n+p^2}{2}+1\right)\mu}{p^2} - \left[\frac{\left(\frac{n+p^2}{2}+1\right)\mu}{p^2}\right]\right) B_1\left(\frac{\mu}{p^2} - \left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$= \sum\nolimits_{\mu \bmod p^2} B_3\left(\frac{\left(\frac{n+p^2}{2}\right)\mu + \mu}{p^2} - \left[\frac{\left(\frac{n+p^2}{2}\right)\mu + \mu}{p^2}\right]\right) B_1\left(\frac{\mu}{p^2} - \left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$= \sum\nolimits_{\mu \bmod p^2} B_3\left(\frac{\left(\frac{n+p^2}{2}\right)\mu}{p^2} + \frac{\mu}{p^2} - \left[\frac{\left(\frac{n+p^2}{2}\right)\mu}{p^2} + \frac{\mu}{p^2}\right]\right) B_1\left(\frac{\mu}{p^2} - \left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$= \sum\nolimits_{\mu \bmod p^2} B_3\left(\frac{\mu}{p^2}\right) B_1\left(\frac{\mu}{p^2}\right) = S^3(1, p^2)$$

$$S^3\left(\frac{n-p^2}{2}-1, p^2\right) = \sum\nolimits_{\mu \bmod p^2} B_3\left(\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}-1\right)\mu}{p^2} - \left[\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}-1\right)\mu}{p^2}\right]\right) B_1\left(\frac{\mu}{p^2} - \left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$= \sum\nolimits_{\mu \bmod p^2} B_3\left(\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}\right)\mu - \mu}{p^2} - \left[\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}\right)\mu - \mu}{p^2}\right]\right) B_1\left(\frac{\mu}{p^2} - \left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$= \sum\nolimits_{\mu \bmod p^2} B_3\left(\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}\right)\mu}{p^2} - \frac{\mu}{p^2} - \left[\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}\right)\mu}{p^2} - \frac{\mu}{p^2}\right]\right) B_1\left(\frac{\mu}{p^2} - \left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$= \sum\nolimits_{\mu \bmod p^2} B_3\left(\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}\right)\mu}{p^2} - \frac{\mu}{p^2} - \frac{\left(\frac{n-p^2}{2}\right)\mu}{p^2} + 1\right) B_1\left(\frac{\mu}{p^2} - \left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$= \sum\nolimits_{\mu \bmod p^2} B_3\left(1 - \frac{\mu}{p^2}\right) B_1\left(\frac{\mu}{p^2}\right) = S^3(-1, p^2)$$

$$S^2\left(\frac{n+p^2}{2}+1,p^2\right)=\sum_{\mu \bmod p^2} B_2\left(\frac{\left(\frac{n+p^2}{2}+1\right)\mu}{p^2}-\left[\frac{\left(\frac{n+p^2}{2}+1\right)\mu}{p^2}\right]\right)B_2\left(\frac{\mu}{p^2}-\left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$=\sum_{\mu \bmod p^2} B_2\left(\frac{\left(\frac{n+p^2}{2}\right)\mu+\mu}{p^2}-\left[\frac{\left(\frac{n+p^2}{2}\right)\mu+\mu}{p^2}\right]\right)B_2\left(\frac{\mu}{p^2}-\left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$=\sum_{\mu \bmod p^2} B_2\left(\frac{\left(\frac{n+p^2}{2}\right)\mu}{p^2}+\frac{\mu}{p^2}-\left[\frac{\left(\frac{n+p^2}{2}\right)\mu}{p^2}+\frac{\mu}{p^2}\right]\right)B_2\left(\frac{\mu}{p^2}-\left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$=\sum_{\mu \bmod p^2} B_2\left(\frac{\mu}{p^2}\right)B_2\left(\frac{\mu}{p^2}\right)=S^2(1,p^2)$$

$$S^2\left(\frac{n-p^2}{2}-1,p^2\right)=\sum_{\mu \bmod p^2} B_2\left(\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}-1\right)\mu}{p^2}-\left[\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}-1\right)\mu}{p^2}\right]\right)B_2\left(\frac{\mu}{p^2}-\left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$=\sum_{\mu \bmod p^2} B_2\left(\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}\right)\mu-\mu}{p^2}-\left[\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}\right)\mu-\mu}{p^2}\right]\right)B_2\left(\frac{\mu}{p^2}-\left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$=\sum_{\mu \bmod p^2} B_2\left(\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}\right)\mu}{p^2}-\frac{\mu}{p^2}-\left[\frac{\left(\frac{n-p^2}{2}\right)\mu}{p^2}-\frac{\mu}{p^2}\right]\right)B_2\left(\frac{\mu}{p^2}-\left[\frac{\mu}{p^2}\right]\right)$$

$$=\sum_{\mu \bmod p^2} B_2\left(1-\frac{\mu}{p^2}\right)B_2\left(\frac{\mu}{p^2}\right)=S^2(-1,p^2)$$

بالإعتماد على ماسبق وعلى التّمهيديّة3 نجد

$$240c^3(sgn\ c)S^3(a,c)=240\times p^6S^3(1,p^2)=2(-p^8+5p^4-4),$$
$$240c^3(sgn\ c)S^3(d,c)=240\times p^6S^3(-1,p^2)=-2(-p^8+5p^4-4),$$
$$180ac^3(sgn\ c)S^2(a,c)=180\left(\frac{n+p^2}{2}+1\right)p^6S^2(1,p^2)=\frac{(p^8+10p^4-6)(n+p^2+2)}{2},$$
$$180dc^3(sgn\ c)S^2(d,c)=180\left(\frac{n-p^2}{2}-1\right)p^6S^2(-1,p^2)=\frac{(p^8+10p^4-6)(n-p^2-2)}{2}.$$

باستخدام التّمهيديّة6 نجد أنّ

$$\zeta_k(-1,C^2)=\frac{n^3+n(p^8+10p^4)}{360p^4}$$

❖ الآن سنقوم بتصنيف زمر الصّفوف ذات الرّتبة 4 للحقل $k=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d=n^2+4$. بالإعتماد على التّمهيديّة9 نجد أنّه إذا كان $\omega(n)\geq 4$ عندئذ $h(d)\geq\omega(n)+1\geq 5$ وبالتّالي إذا كان $h(d)=4$ عندئذ $\omega(n)=1$ أو $\omega(n)=2$ أو $\omega(n)=3$.

مبرهنة4:

ليكن $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d = n^2 + 4$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع، وليكن $n = p^r q^s \ell^t$ حيث p, q, ℓ أعداد أوّليّة فرديّة و r, s, t أعداد صحيحة غير سالبة عندئذٍ

1. إذا كان $s = t = 0$ و $r > 3$ و $h(d) = 4$ عندئذٍ $C_k \cong \mathbb{Z}_4$.
2. إذا كان $t = 0$ و r, s أعداد صحيحة موجبة أحدهما أكبر تماماً من 2 و $h(d) = 4$ عندئذٍ $C_k \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
3. إذا كان r, s, t أعداد صحيحة موجبة تماماً و $h(d) = 4$ عندئذٍ $C_k \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

الإثبات:

ليكن A صفّ الإيديال الرئيسيّ للحقل $k = \mathbb{Q}(\sqrt{n^2 + 4})$ عندئذٍ $\zeta_k(-1, A) = \frac{n^3 + 11n}{360}$ حسب التّمهيديّة7

إثبات1: لدينا في هذه الحالة $n = p^r$ $(\omega(n) = 1)$

بما أنّ $\langle p \rangle = \langle p, \frac{p+2+\sqrt{d}}{2} \rangle \langle p, \frac{p+2-\sqrt{d}}{2} \rangle$ حسب المبرهنة2 عندئذٍ ليكن C صفّ الإيديال الذي ينتمي إليه $\langle p, \frac{p+2+\sqrt{d}}{2} \rangle$ عندئذٍ حسب التّمهيديّة8 نجد

$$\zeta_k(-1, \mathrm{C}) = \frac{n^3 + n(p^4 + 10p^2)}{360p^2}.$$

وبالإعتماد على المبرهنة3 نجد

$$\zeta_k(-1, \mathrm{C}^2) = \frac{n^3 + n(p^8 + 10p^4)}{360p^4}.$$

إذا كان $\zeta_k(-1, \mathrm{C}) = \zeta_k(-1, A)$ عندئذ $n = p$ وهذا مرفوض.

إذا كان $\zeta_k(-1, \mathrm{C}^2) = \zeta_k(-1, A)$ عندئذ $n = p^2$ وهذا مرفوض.

إذا كان $\zeta_k(-1, C) = \zeta_k(-1, \mathrm{C}^2)$ عندئذ $n = p^3$ وهذا مرفوض.

بما أنّ C و C^2 صفوف إيديالات غير رئيسيّة مختلفة للحقل k وهذا يبين أنّ رتبة العنصر C أكبر تماماً من 2، وبما أنّ رتبة أي عنصر من C_k تقسم رتبة الزّمرة عندئذٍ رتبة العنصر C تساوي 4 وبالتّالي $C_k \cong \mathbb{Z}_4$.

إثبات2: لدينا في هذه الحالة $n = p^r q^s$ $(\omega(n) = 2)$

لدينا $\langle p \rangle = \langle p, \frac{p+2+\sqrt{d}}{2} \rangle \langle p, \frac{p+2-\sqrt{d}}{2} \rangle$

ليكن C صفّ الإيديال للحقل $k = \mathbb{Q}(\sqrt{n^2 + 4})$ بحيث $\langle p, \frac{p+2+\sqrt{d}}{2} \rangle \in C$ عندئذٍ حسب التّمهيديّة8 نجد

$$\zeta_k(-1, \mathrm{C}) = \frac{n^3 + n(p^4 + 10p^2)}{360p^2}.$$

وبالإعتماد على المبرهنة3 نجد

$$\zeta_k(-1, \mathrm{C}^2) = \frac{n^3 + n(p^8 + 10p^4)}{360p^4}.$$

وأيضا نجد أنّ

$$\langle q \rangle = \langle q, \frac{q + 2 + \sqrt{d}}{2} \rangle \langle q, \frac{q + 2 - \sqrt{d}}{2} \rangle$$

وليكن D صفّ الإيديال للحقل $k = \mathbb{Q}(\sqrt{n^2 + 4})$ بحيث $\langle q, \frac{q+2+\sqrt{d}}{2} \rangle \in D$ عندئذٍ حسب التّمهيديّة8 نجد

$$\zeta_k(-1,D)=\frac{n^3+n(q^4+10q^2)}{360q^2}.$$

إذا كان $\zeta_k(-1,C)=\zeta_k(-1,A)$ عندئذٍ $n=p$ وهذا مرفوض. إذا كان $\zeta_k(-1,D)=\zeta_k(-1,A)$ عندئذٍ $n=q$ وهذا مرفوض. إذا كان $\zeta_k(-1,C)=\zeta_k(-1,D)$ عندئذٍ $n=pq$ وهذا مرفوض. نلاحظ بأنّ C,D صفوف إيديالات غير رئيسيّة مختلفة للحقل k. بما أنّ $\langle p,\frac{p+2-\sqrt{d}}{2}\rangle\in C^{-1}$ و $\langle q,\frac{q+2-\sqrt{d}}{2}\rangle\in D^{-1}$ عندئذ حسب التّمهيديّة8

$$\zeta_k(-1,C)=\zeta_k(-1,C^{-1})=\frac{n^3+n(p^4+10p^2)}{360p^2},$$

$$\zeta_k(-1,D)=\zeta_k(-1,D^{-1})=\frac{n^3+n(q^4+10q^2)}{360q^2}.$$

لنفرض جدلاً أنّ $C_k\cong\mathbb{Z}_4$ عندئذ C أو D مولّد للزّمرة C_k. ليكن مثلاً هذا المولّد C

$$C_k=\{C^0=A,C^1=C,C^2,C^3=C^{-1}\}$$

نلاحظ بأنّ $C^{-1}\neq D$ (لأنّه لو كان $C^{-1}=D$ عندئذٍ $\zeta_k(-1,C^{-1})=\zeta_k(-1,D)$ وبالتّالي $n=pq$ وهذا مرفوض)، عندئذٍ $C^2=D$ وبالتّالي $\zeta_k(-1,C^2)=\zeta_k(-1,D)$ عندئذٍ $n=p^2q$ وهذا مرفوض. بالتّالي الفرض الجدلي خاطئ عندئذٍ $C_k\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

إثبات3: لدينا في هذه الحالة $n=p^rq^s\ell^t$ $(\omega(n)=3)$

لدينا حسب المبرهنة2

$$\langle p\rangle=\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle\langle p,\frac{p+2-\sqrt{d}}{2}\rangle$$

$$\langle q\rangle=\langle q,\frac{q+2+\sqrt{d}}{2}\rangle\langle q,\frac{q+2-\sqrt{d}}{2}\rangle$$

$$\langle \ell\rangle=\langle \ell,\frac{\ell+2+\sqrt{d}}{2}\rangle\langle \ell,\frac{\ell+2-\sqrt{d}}{2}\rangle$$

ليكن C,D,E صفوف إيديالات للحقل $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{n^{2}+4}\right)$ بحيث $\langle p,\frac{p+2+\sqrt{d}}{2}\rangle\in C$ و $\langle q,\frac{q+2+\sqrt{d}}{2}\rangle\in D$ و $\langle \ell,\frac{\ell+2+\sqrt{d}}{2}\rangle\in \mathrm{E}$ عندئذ حسب التّمهيديّة8 نجد

$$\zeta_k(-1,C)=\frac{n^3+n(p^4+10p^2)}{360p^2}$$

$$\zeta_k(-1,D)=\frac{n^3+n(q^4+10q^2)}{360q^2}$$

$$\zeta_k(-1,\mathrm{E})=\frac{n^3+n(\ell^4+10\ell^2)}{360\ell^2}$$

نلاحظ بأنّ C,D,E صفوف إيديالات غير رئيسيّة مختلفة للحقل k.

بما أنّ $h(d)=4$ عندئذٍ $C_k=\{A,C,D,E\}$. لنفرض جدلاً أنّ $C_k\cong\mathbb{Z}_4$. ليكن مثلاً هذا المولد C. عندئذٍ $C^{-1}=D$ أو $C^{-1}=E$ بالتّالي $\zeta_k(-1,C)=\zeta_k(-1,D)$ أو $\zeta_k(-1,C)=\zeta_k(-1,E)$ وهذا مرفوض. بالتّالي الفرض الجدليّ خاطئ عندئذٍ $C_k\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

الاستنتاجات والتّوصيات:

توصّلنا في هذه المقالة إلى تصنيف زمر صفوف الإيديالات ذات الرّتبة 4 للحقل $k=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d=n^2+4$ عدد صحيح موجب حرّ من التّربيع.

أمّا بالنّسبة للتّوصيات: فنوصي بتصنيف زمر صفوف الإيديالات ذات الرّتبة 4 لأسرة معينة من الحقول التّربيعيّة.

References:

1) ALACA. S, WILLIAMS. K. S., *Introductory algebraic number theory*, Cambridge University Press. New York, 2004.
2) BARNER. K., *Über die Werte der Ringklassen-L- Funktionen reell- quadratis cher Zahlkörper an natürlichen Argumentstellen*. Journal of Number theory, vol. 1, pp. 28–64, 1969.
3) BOLKER. E. D., *Elementary Number Theory*, An Algebraic Approach, W. A. Bedjamin, Inc. New York, 1970.
4) BYEON. D., Kim. H. K., *Class number 1 criteria for real quadratic fields of Richaud–Degert type*, Journal of Number theory , vol. 57, no. 2, pp. 328–339, 1996.
5) BYEON. D., KIM. H. K., *Class number 2 criteria for real quadratic fields of Richaud–Degert type*, Journal of Number theory, vol. 62, no. 2, pp. 257–272, 1997.
6) CHAKRABORTY. K., HOQUE. A., and Mishra. M., A classification of order 4 class groups of $\mathbb{Q}(\sqrt{n^2+1})$. arXiv:1902.05250v1 [math.NT] 14 Feb 2019.

7) CHAKRABORTY. K., HOQUE. A., and Mishra. M., *On the structure of order 4 class groups of* $\mathbb{Q}(\sqrt{n^2+1})$. arXiv:1902.05250v2 [math.NT] 19 Apr 2020.
8) HALTER-KOCH. F., *Quadratic Irrationals: An introduction to Classical Number Theory*, Taylor & Francis Group, University of Graz Austria, 2013.
9) KIM. H. K., *A conjecture of S. Chowla and related topics in analytic number theory*, Ph.D. thesis, The Johns Hopkins University, Baltimore, MD, USA, 1988.
10) LANG. H., *Über eine Gattung elementar-arithmetischer Klassen invarianten reell-quadratischer Zahlkörper*, Journal für Die Reine und Angewandte Mathematik, vol. 223, pp. 123–175, 1968.
11) LARSON. N., *The Bernoulli Numbers: A Brief Primer*, 2019.
12) SANKARI. H., ISSA. A., *Lower Bound for the Class Number of* $\mathbb{Q}(\sqrt{n^2+4})$, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2020.