الترابط من النوع β_s^* في الفضاءات التبولوجية

د. عدنان ظريف[*]

د. براءة عفيصة[**]

زلوخ محمود[***]

(تاريخ الإيداع 19 / 1 / 2021. قُبِل للنشر في 21 / 2 /2021)

□ ملخّص □

في هذا البحث سنقدم نوعاً جديداً من المجموعات المفتوحة هو المجموعات المفتوحة من النوع β_s^*، وسنعرف بالاستفادة منها الفضاء المترابط من النوع β_s^*، إضافة إلى ذلك سندرس خصائص هذا الفضاء وعلاقته بالفضاءات المترابطة والفضاءات المترابطة من النوع β والفضاءات نصف المترابطة .

وسنقدم مفهوماً جديداً هو الفضاء غير المتقطع موضعياً من النوع β، وكذلك مفهوم التابع المستمر من النوع β_s^*، وسنبين أن نظرية القيمة المتوسطة تتحقق من أجل التوابع المستمرة من النوع β_s^* .

الكلمات المفتاحية: المجموعة المفتوحة من النوع β_s^* –الفضاء نصف المترابط –الفضاء المترابط من النوع β – الفضاء المترابط من النوع β_s^* – الاستمرار من النوع β_s^* .

[*] أستاذ مساعد– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

[**] مدرسة – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

[***] طالبة دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

β_s^* -Connectedness in Topological Spaces

Dr. Adnan Zarif*
Dr. Baraa Afisa**
Zoulouk Mahmoud**

(Received 19 / 1 / 2021. Accepted 21 / 2 /2021)

□ ABSTRACT □

In this research, we will give a new kind of open sets a β_s^* -open sets and we'll know to benefit from it β_s^* -connected space and in addition to study of the properties of this space and its relationship to β -connected space and semi-connected space and connectedness.
We will introduce a new concept of β -locally indiscrete space, and so we will define the function β_s^* -continuous mappings, we shall show that the theory of value medium realized in order to β_s^* -continuous mappings.

Keywords: β_s^* -open set, Semi connected space, β -connected space, β_s^* -connected space, β_s^* -continuous mapping.

*Associate Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Assistant Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
***Postgraduate Student, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

تعَد المجموعات المفتوحة في الفضاءات التبولوجية حجر الأساس في التعرف على بنية الفضاء التبولوجي وخصائصه التبولوجية، إذ إن دراسة الترابط يعتمد بشكل أساسي على المجموعات المفتوحة، ومن أجل الحصول على ميزات إضافية قام الباحثون باستنباط أنماط جديدة من المجموعات التي قد تلعب دوراً مماثلاً للمجموعات المفتوحة، حيث عرَف الباحث Levine [1] المجموعة نصف المفتوحة في عام 1963 ، وعرَف الباحثون Mashhour و Abd El-Monsef وEl-Deeb في عام 1982 [2] مفهوم المجموعة قبل المفتوحة ، و في عام 1983 عرفوا مفهوم المفتوحة من النوع β، وثم درسوا العلاقة بين هذه المجموعات[3]. وفي عام 2017 وضع الباحثون Tyagi وSingh وBhardwaj [4] تعريف المجموعة المفتوحة من النوع P_β ، بالإضافة إلى تعريفهم للمجموعة المفتوحة من النوع α_β في عام 2018 [5] ، وبالاعتماد على تلك الأنواع من المجموعات تم تعريف أنماط جديدة من الفضاءات المترابطة، ودراسة خصائصها والعلاقات فيما بينها وذلك في الأعمال[4] و[5] و[6]

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث في كونه يقدم توصيفات إضافية لبعض أنواع الفضاءات التبولوجية في مجال الترابط اعتماداً على المجموعات المفتوحة من النوع β_s^*، والهدف من البحث هو دراسة الفضاءات المترابطة بأنواعها المختلفة والعلاقات فيما بينها.

طرائق البحث ومواده:

البحث يقع ضمن اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص ضمن التبولوجيا العامة ، لذلك فإن الطرائق المتبعة فيه نظرية وتعتمد بشكل أساسي على مفاهيم أساسية في نظرية المجموعات والتبولوجيا العامة.

نورد فيما يلي بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث:

(X,τ) فضاء تبولوجي .

$\operatorname{int}(A)$ داخلية مجموعة A .

$cl(A)$ لصاقة مجموعة A .

تعاريف ومفاهيم أساسية:

<u>تعريف 1</u>: يقال عن المجموعة A أنها مجموعة نصف مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ) إذا تحققت العلاقة الآتية : $A\subseteq cl(\operatorname{int}(A))$ ويرمز لأسرة المجموعات نصف المفتوحة في هذا الفضاء بالرمز $SO(X)$.[1].

<u>تعريف 2</u>: يقال عن المجموعة A أنها مجموعة مفتوحة من النوع β ($\beta-$مفتوحة) في الفضاء التبولوجي (X,τ) إذا كان: $A\subseteq cl(\operatorname{int}(cl(A)))$ ويرمز لأسرة المجموعات المفتوحة من النوع β بالرمز $\beta O(X)$.[2].

<u>تعريف 3</u>: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) أنه غير متقطع موضعياً إذا كانت كل مجموعة مفتوحة في X مغلقة فيه.[4] .

<u>تعريف 4</u>: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) أنه $S-$مترابط إذا لم نستطع كتابته على شكل اجتماع مجموعتين منفصلتين ونصف مفتوحتين في X .[6].

تعريف 5: لتكن A,B مجموعتين غير خاليتين من فضاء تبولوجي (X,τ) يقال عن A,B أنهما متباعدتان بالتبادل من النوع β إذا تحقق: $A\cap\beta Cl(B)=\phi=\beta Cl(A)\cap B$.[6].

تعريف 6: لتكن A مجموعة من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) يقال عن A أنها β_s−مترابطة في X إذا كانت المجموعة A ليست اجتماع لمجموعتين متباعدتين بالتبادل من النوع β في X .[6].

تعريف 7: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) أنه فضاء β−مترابط إذا لم نستطع كتابته على شكل اجتماع مجموعتين منفصلتين ومفتوحتين من النوع β في X .[7].

تعريف 8: نقول عن المجموعة A المفتوحة من النوع β أنها مجموعة مفتوحة من النوع β_s^* (β_s^*−مفتوحة) في الفضاء التبولوجي (X,τ) إذا كان من أجل كل $x\in A$ يوجد مجموعة S−مغلقة ولتكن F بحيث أن: $x\in F\subseteq A$ ونرمز لأسرة المجموعات المفتوحة من النوع β_s^* في هذا الفضاء بالرمز $\beta_s^*O(X)$.

ونقول عن المجموعة B أنها مجموعة β_s^*−مغلقة إذا كان $X\setminus B$ مجموعة β_s^*−مفتوحة .

تعريف 9: لتكن A مجموعة من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) نقول عن A أنها مجاورة من النوع β_s^* للنقطة x من الفضاء X إذا وجدت مجموعة مفتوحة من النوع β_s^* مثل U بحيث يكون: $x\in U\subseteq A$ ونرمز لأسرة المجاورات من النوع β_s^* بالرمز $V_{\beta_s^*}(x)$.

تعريف 10: لتكن A مجموعة من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) نسمي النقطة x من الفضاء X نقطة لاصقة من النوع β_s^* بالمجموعة A إذا تحقق الشرط: $A\cap U\neq\phi;\forall U\in\beta_s^*O(X,x)$

نسمي مجموعة كل النقاط اللاصقة من النوع β_s^* للمجموعة A بلصاقة المجموعة A من النوع β_s^* ونرمز لها بالرمز $\beta_s^*Cl(A)$.

تعريف 11: لتكن A مجموعة من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) نسمي النقطة x من الفضاء X نقطة لداخلية من النوع β_s^* بالمجموعة A إذا تحقق الشرط: $\exists U\in\beta_s^*O(X,x);x\in U\subseteq A$

نرمز لمجموعة جميع النقاط الداخلية للمجموعة A بالرمز $\beta_s^*Int(A)$.

تعريف 12: لتكن A,B مجموعتين غير خاليتين من فضاء تبولوجي (X,τ) نقول عن A,B أنهما متباعدتان بالتبادل من النوع β_s^* إذا تحقق: $A\cap\beta_s^*Cl(B)=\phi=\beta_s^*Cl(A)\cap B$.

تعريف 13: لتكن A مجموعة من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) نقول عن A أنها مترابطة من النوع β_s^* في X إذا كانت المجموعة A ليست اجتماع لمجموعتين متباعدتين بالتبادل من النوع β_s^* في X .

تعريف 14: نقول عن الفضاء التبولوجي (X,τ) أنه فضاء β_s^*−مترابط إذا لم نستطع كتابته على شكل اجتماع مجموعتين منفصلتين ومفتوحتين من النوع β_s^* في X .

تعريف 15: ليكن X,Y فضاءين تبولوجيين ولتكن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ عندئذ تكون f مستمرة من النوع β_s^* إذا كانت $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة من النوع β_s^* في الفضاء (X,τ) من أجل كل V مجموعة مفتوحة في الفضاء (Y,σ) .

تعريف 16 : نقول عن الفضاء التبولوجي (X,τ) أنه غير متقطع موضعياً من النوع β إذا كانت كل مجموعة β - مفتوحة في X مغلقة فيه.

النتائج والمناقشة:

<u>نتيجة 1:</u>

بالاعتماد على التعاريف السابقة نستنتج أن $\beta_s^* O(X) \subseteq SO(X) \subseteq \beta O(X)$ ولكن ليس بالضرورة أن تتحقق العلاقة $\tau \subseteq \beta_s^* O(X)$ والمثال الآتي يبين ذلك:

<u>مثال 1:</u>

لنعرف على المجموعة $X = \{a,b,c,d\}$ التبولوجيا τ على الشكل الآتي:

$\tau = \{X,\phi,\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ عندئذ نجد أن أسرة المجموعات المغلقة في (X,τ) هي: $F = \{X,\phi,\{c,d\},\{d\}\}$

وأسرة المجموعات المفتوحة من النوع β هي:

$$\beta O(X) = \{X,\phi,\{a,b\},\{a,b,c\},\{a\},\{b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{a,c,d\}\}$$

وأسرة المجموعات نصف المفتوحة هي:

$$SO(X) = \{X,\phi,\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}$$

ومنه أسرة المجموعات نصف المغلقة هي: $SC(X) = \{X,\phi,\{c,d\},\{d\},\{c\}\}$

وتكون المجموعات المفتوحة من النوع β_s^* هي: $\beta_s^* O(X) = \{X,\phi\}$

من المثال نجد أن:

$$\beta_s^* O(X) \subseteq SO(X) \subseteq \beta O(X) \text{ لكن } \tau \not\subset \beta_s^* O(X)$$

ونلاحظ أيضاً في هذا المثال أن (X,τ) فضاء β_s^*−مترابط حيث لا توجد مجموعتين متباعدتين بالتبادل من النوع β_s^*يكون اجتماعهما مساوياً الفضاء الكلي X .

<u>تمهيدية 1</u>:

لتكن A,B مجموعتين كيفيتين من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) عندئذ تكون العبارات الآتية محققة:

1. $A \subseteq \beta_s^* Cl(A)$.
2. إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $\beta_s^* Cl(A) \subseteq \beta_s^* Cl(B)$.
3. $\beta_s^* Cl(A)$ هي أصغر مجموعة مغلقة من النوع β_s^* تحوي المجموعة A .
4. A مجموعة مغلقة من النوع β_s^* إذا وفقط إذا كانت $A = \beta_s^* Cl(A)$.
5. $\beta_s^* Cl(A) \cup \beta_s^* Cl(B) \subset \beta_s^* Cl(A \cup B)$.
6. $\beta_s^* Cl(A \cap B) \subset \beta_s^* Cl(A) \cap \beta_s^* Cl(B)$.

<u>ملاحظة 1</u>: البرهان ينتج من العلاقة بين المجموعات المفتوحة من النوع β والمجموعات المفتوحة من النوع β_s^* ومن النتائج السابقة للمجموعات المفتوحة من النوع β .

<u>ملاحظة 2</u>: إن الاحتواء في (5) و(6) لا يمكن استبداله بمساواة في الحالة العامة و المثال الآتي يوضح ذلك:

<u>مثال 2:</u> لنعرف على المجموعة $X = \{a,b,c,d\}$ التبولوجيا τ على الشكل الآتي:

$\tau = \{X,\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ عندئذ فإن: $F = \{X,\phi,\{d\},\{a,d\},\{b,c,d\}\}$

والمجموعات المفتوحة من النوع β هي:

$$\beta O(X)=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b\},\{c\},\{a,c\},\{a,b\},\{a,d\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$$

وأسرة المجموعات نصف المفتوحة هي:

$$SO(X)=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$$

ومنه أسرة المجموعات نصف المغلقة هي: $SC(X)=\{X,\phi,\{a\},\{d\},\{b,c\},\{a,d\},\{b,c,d\}\}$

وتكون أسرة المجموعات المفتوحة من النوع β_s^* هي:

$$\beta_s^*O(X)=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$$

وتكون أسرة المجموعات المغلقة من النوع β_s^* هي: $\beta_s^*C(X)=\{X,\phi,\{a\},\{d\},\{b,c\},\{a,d\},\{b,c,d\}\}$

بأخذ المجموعتين: $A=\{a\}$ و $B=\{b,c\}$ يكون لدينا : $A\cup B=\{a,b,c\}\Rightarrow \beta_s^*Cl(A\cup B)=X$

ولمّا كان $\beta_s^*Cl(A)=\{a\}$ و $\beta_s^*Cl(B)=\{b,c\}$ نجد أن: $\beta_s^*Cl(A)\cup\beta_s^*Cl(B)=\{a,b,c\}$

وفقاً لما سبق فإن: $\beta_s^*Cl(A\cup B)\neq\beta_s^*Cl(A)\cup\beta_s^*Cl(B)$

بالإضافة إلى أن: $\beta_s^*Cl(A\cup B)\not\subset\beta_s^*Cl(A)\cup\beta_s^*Cl(B)$

وبأخذ المجموعتين $C=\{a,b,d\}$ و $D=\{c,d\}$ يكون لدينا:

$$C\cap D=\{d\}\Rightarrow \beta_s^*Cl(C\cap D)=\{d\}$$

وبما أن $\beta_s^*Cl(D)=\{b,c,d\}$ و $\beta_s^*Cl(C)=X$ نجد أن: $\beta_s^*Cl(C)\cap\beta_s^*Cl(D)=\{b,c,d\}$

من المثال نستنتج أن: $\beta_s^*Cl(C)\cap\beta_s^*Cl(D)\neq\beta_s^*Cl(C\cap D)$.

و $\beta_s^*Cl(C)\cap\beta_s^*Cl(D)\not\subset\beta_s^*Cl(C\cap D)$.

<u>نتيجة 2</u> : كل مجموعة β_s –مترابطة هي مجموعة β_s^* –مترابطة لكن العكس غير صحيح بصورة عامة.

البرهان: لتكن A مجموعة β_s –مترابطة ولنفرض جدلاً أنها ليست β_s^* –مترابطة بالتالي المجموعة A يمكن كتابتها على شكل اجتماع مجموعتين متباعدتين بالتبادل من النوع β_s^* ولنفرض أنهما B و C أي أن: $A=B\cup C$ حيث B و C تحققان:

$B\cap\beta_s^*cl(C)=\phi=C\cap\beta_s^*cl(B)$ ومن النتيجة 1 وجدنا أن:

$\beta_s^*O(X)\subseteq\beta O(X)$ ومنه يكون $\beta_s^*C(X)\subseteq\beta C(X)$

بالتالي $\beta_s^*cl(C)\subseteq\beta cl(C)$ و $\beta_s^*cl(B)\subseteq\beta cl(B)$

عندئذ يكون $B\cap\beta cl(C)=\phi=C\cap\beta cl(B)$ ومنه A مجموعة ليست β_s –مترابطة.

لإثبات أن العكس غير صحيح بصورة عامة لدينا من المثال 2 وجدنا أن أسرة المجموعات المفتوحة من النوع β هي:

$$\beta O(X)=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b\},\{c\},\{a,c\},\{a,b\},\{a,d\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$$

وأسرة المجموعات المغلقة من النوع β هي:

$$\beta C(X)=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$$

وأسرة المجموعات المفتوحة من النوع β_s^* هي:

$$\beta_s^*O(X)=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$$

وأسرة المجموعات المغلقة من النوع β_s^* هي: $\beta_s^*C(X)=\{X,\phi,\{a\},\{d\},\{b,c\},\{a,d\},\{b,c,d\}\}$

بأخذ المجموعة $A=\{b,c\}$ نلاحظ أنها β_s^* −مترابطة حيث لا يمكن إيجاد مجموعتين متباعدتين بالتبادل من النوع β_s^* واجتماعهما يعطي المجموعة A، لكنها ليست β_s −مترابطة لأنه يمكن كتابتها على شكل اجتماع مجموعتين متباعدتين بالتبادل من النوع β هما $\{b\}$ و $\{c\}$.

<u>تمهيدية 2</u>:

لتكن A مفتوحة ومغلقة بآن واحد في فضاء تبولوجي (X,τ) عندئذ تكون المجموعة A مجموعة β_s^* −مفتوحة و β_s^* −مغلقة بآن واحد في (X,τ).

البرهان:

بما أن A مجموعة تحقق أنها مفتوحة ومغلقة بآن واحد في فضاء X و لمَا كانت الاحتواءات التالية محققة دوماً $\tau \subseteq SO(X) \subseteq \beta O(X)$ يكون لدينا :

بما أن A مجموعة مفتوحة فرضاً بالتالي ......* $A \in SO(X) \subseteq \beta O(X)$

وبما أن A مجموعة مغلقة فرضاً فإن ......** $A \in SC(X) \subseteq \beta C(X)$

بالتالي من * و ** نجد أن

المجموعة A تحقق أنها مجموعة β −مفتوحة و S −مغلقة و β −مغلقة و S −مفتوحة وبالاعتماد على تعاريف المجموعات β_s^* −مفتوحة و β_s^* −مغلقة تكون المجموعة A مجموعة β_s^* −مفتوحة و β_s^* −مغلقة بآن واحد.

<u>مبرهنة1</u>:

إن أية مجموعة β −مفتوحة في فضاء غير متقطع موضعياً من النوع β تكون مجموعة مفتوحة ومغلقة بآن واحد في هذا الفضاء.

البرهان:

لتكن A مجموعة β −مفتوحة في فضاء X غير متقطع موضعياً من النوع β بالتالي يكون $Cl(A)=A$

و حسب تعريف المجموعة المفتوحة من النوع β فإن :

$$A \subseteq Cl(\operatorname{int}(Cl(A))) \Rightarrow A \subseteq Cl(\operatorname{int}(A)) \ldots\ldots\ldots(1)$$

و نعلم أن داخلية أية مجموعة هي دوماً مجموعة مفتوحة أي أن $\operatorname{int}(A) \in \tau \subseteq \beta O(X)$

أي أن $\operatorname{int}(A)$ مجموعة β −مفتوحة في فضاء غير متقطع موضعياً من النوع β ومنه :

$Cl(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$ بالعودة إلى (1) نجد أن: $A \subseteq \operatorname{int}(A)$ ....*

و الاحتواء المعاكس محقق دوماً $\operatorname{int}(A) \subseteq A$ ......**

من * و** نجد أن $\operatorname{int}(A)=A$ بالتالي أصبح لدينا $\operatorname{int}(A)=A$ و $Cl(A)=A$ أي أن A مجموعة مفتوحة ومغلقة بآن.

<u>تمهيدية 3</u>:

ليكن (X,τ) فضاءً غير متقطع موضعياً من النوع β تتحقق العلاقات الآتية:

$$\beta_s^* O(X) = \tau = \beta O(X) = SO(X)$$

البرهان: لدينا العلاقات الآتية محققة $\beta_s^* O(X) \subseteq SO(X) \subseteq \beta O(X)$ و $\tau \subseteq \beta O(X)$

ولنثبت أن: $\beta O(X) \subseteq SO(X)$ و $\beta O(X) \subseteq \beta_s^* O(X)$ و $\beta O(X) \subseteq \tau$

إثبات أن العلاقة التالية محققة $\beta O(X)\subseteq SO(X)$

لتكن A مجموعة β –مفتوحة عندئذ يتحقق لدينا $A\subseteq Cl(\mathrm{int}(Cl(A)))$ وبما أن X فضاء غير متقطع موضعياً من النوع β فإن $Cl(A)=A$ يصبح لدينا $A\subseteq Cl(\mathrm{int}(A))$

أي أن A مجموعة S –مفتوحة بالتالي $\beta O(X)\subseteq SO(X)$.

إثبات أن $\beta O(X)\subseteq \beta_s^* O(X)$:

لتكن A مجموعة β –مفتوحة عندئذ حسب الفرض أن X فضاء غير متقطع موضعياً من النوع β تكون A مغلقة وبالتالي فهي S –مغلقة ومنه حسب تعريف المجموعة المفتوحة من النوع β_s^* تصبح A مجموعة β_s^* –مفتوحة.

إثبات أن $\beta O(X)\subseteq \tau$:

لتكن A مجموعة β –مفتوحة عندئذ $A\subseteq cl(\mathrm{int}(cl(A)))$ وبما أن X فضاء غير متقطع موضعياً من النوع β فإن $cl(A)=A$ بالتالي: $A\subseteq cl(\mathrm{int}(A)).....*$

لكن $in(A)$ مجموعة مفتوحة فهي مجموعة مفتوحة من النوع β ومنه $cl(\mathrm{int}(A))=\mathrm{int}(A)$

بالتعويض في * نجد أن: $A\subseteq \mathrm{int}(A)$ ولدينا $\mathrm{int}(A)\subseteq A$ محقق دوماً

بالتالي A مجموعة مفتوحة أي أن $A\in\tau$ ومنه يكون $\beta O(X)\subseteq \tau$.

<u>مبرهنة 2</u>: من أجل أي فضاء تبولوجي (X,τ) تتكافأ الشروط الآتية:

1. X فضاء β_s^* –مترابط.
2. المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان من النوع β_s^* بآن في X هما X,ϕ .
3. لا توجد دالة غير ثابتة ،غامرة ومستمرة من النوع β_s^* تنطلق من X وتستقر في فضاء متقطع مؤلف من أكثر من نقطة واحدة.

البرهان:

$(1)\Rightarrow(2)$: بفرض أن X فضاء β_s^* –مترابط ، ولتكن $A\subseteq X$ مجموعة تحقق أنها β_s^* –مفتوحة و β_s^* –مغلقة في X ، عندئذ $B=X\setminus A$ تكون أيضا مجموعة β_s^* –مفتوحة و β_s^* –مغلقة في X ، لمَا كان A,B مجموعتين مغلقتين من النوع β_s^* فإن $\beta_s^* Cl(A)=A$ و $\beta_s^* Cl(B)=B$ بناء على ذلك فإن:

$$\beta_s^* Cl(B)\cap A=A\cap B=\phi \quad \text{و} \quad \beta_s^* Cl(A)\cap B=A\cap B=\phi$$

وبما أن X فضاء β_s^* –مترابط بالتالي واحدة من المجموعتين A,B يجب أن تساوي ϕ أو X .

$(2)\Rightarrow(1)$: ينتج من تعريف الفضاء المترابط من النوع β_s^* .

$(1)\Rightarrow(3)$ ليكن Y فضاء متقطع بأكثر من نقطة و $f:X\to Y$ دالة غير ثابتة β_s^* –مستمرة بأخذ $u\in Y, U=\{u\}$ و $V=Y\setminus U$ عندئذ بما أن $f:X\to Y$ تطبيق غامر فإن :

$$f(X)=Y=U\cup V\Rightarrow X=f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)$$

وبما أن Y فضاء متقطع فإن U,V مجموعتان مفتوحتان في Y في ولمَا كان f مستمراً من النوع β_s^* فإن الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة β_s^* –مفتوحة في X أي أن

$f^{-1}(V), f^{-1}(U)$ مجموعتان β_s^*–مفتوحتان وغير خاليتين في X

$X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ نجد أن الفضاء X غير مترابط من النوع β_s^* وهذا يناقض الشرط (1).

$(1) \Rightarrow (3)$ إذا كان من الممكن الفرض أن X فضاء غير مترابط من النوع β_s^* عندئذ لنكتب X بالشكل $A \cup B$ ، حيث A, B مجموعتان غير خاليتين β_s^*–مفتوحتين ، ولتكن $Y = \{0,1\}$ مع التبولوجيا المتقطعة ولنعرف التطبيق $f : X \to Y$ بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 0, if\ x \in A \\ 1, if\ x \in B \end{cases}$$

عندئذ $f^{-1}(\phi) = \phi$ وهي مجموعة β_s^*–مفتوحة في X ولدينا أيضاً :

$$f^{-1}(Y) = f^{-1}(\{0\} \cup \{1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\}) = A \cup B$$

عندئذ: $f^{-1}(\{0\}) = A$ مجموعة β_s^*–مفتوحة في X و $f^{-1}(\{1\}) = B$ مجموعة β_s^*–مفتوحة في X وبما أن $Y = \{0,1\}$ مع التبولوجيا المتقطعة فإن $\phi, \{0\}, \{1\}$ مجموعات مفتوحة في Y وفقاً لما سبق أصبح لدينا الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة هي مجموعة β_s^*–مفتوحة في X بالتالي f تكون دالة β_s^*–مستمرة و غامرة وهذا يناقض الفرض.

<u>مبرهنة 3</u>:

إن النتائج الآتية تتحقق من أجل أي فضاء تبولوجي (X, τ):

1. إذا كان X فضاء β–مترابط عندئذ يكون X فضاء β_s^*–مترابط.
2. إذا كان X فضاء β_s^*–مترابط عندئذ يكون X فضاء مترابط.
3. يكون الفضاء X فضاءً S–مترابط إذا وفقط إذا كان β_s^*–مترابط.

البرهان:

1- إذا كان X فضاء β–مترابط عندئذ بوضوح نجد أن X فضاء β_s^*–مترابط لأن:
$\beta_s^* O(X) \subseteq \beta O(X)$.

2- ليكن X فضاء β_s^*–مترابط ، ولنفرض أن X غير مترابط عندئذ توجد مجموعة غير خالية ولتكن A من X ، بحيث أن A مجموعة مفتوحة ومغلقة بآن واحد في X وبالاعتماد على التمهيدية 2 تكون A مجموعة β_s^*– مفتوحة و β_s^*–مغلقة في X ، بالتالي X فضاء غير مترابط من النوع β_s^* ، وهذا يناقض الفرض عندئذ يكون X فضاء مترابط.

3- $(\Leftarrow$ إذا كان X فضاء S–مترابط عندئذ بوضوح نجد أن X فضاء β_s^*–مترابط لأن:

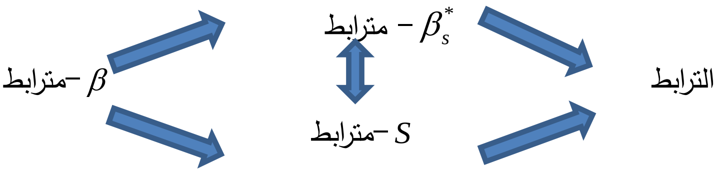
$$\beta_s^* O(X) \subseteq SO(X) \subseteq \beta O(X)$$

$(\Rightarrow$ لنفرض أن X فضاء غير مترابط من النوع S و أنه β_s^*–مترابط عندئذ:

يكون X اجتماع لمجموعتين غير خاليتين مفتوحتين من النوع S ولتكن A, B أي أن $X = A \cup B$ ومنه $A^c = B$ و $B^c = A$ ، ولمَا كان $SO(X) \subseteq \beta O(X)$

فإن A,B مجموعتان β–مفتوحتان و S–مغلقتان ، بالتالي بالاعتماد على تعريف المجموعة β_s^*–مفتوحة تكون A,B مجموعتين β_s^*–مفتوحتين أي أن X فضاء غير مترابط من النوع β_s^* وهذا يناقض الفرض بالتالي X فضاء S–مترابط.

<u>**ينتج من الدراسة السابقة المخطط السهمي الآتي:**</u>



<u>**مبرهنة 4:**</u>

إذا كانت A مجموعة β_s^*–مترابطة في فضاء تبولوجي (X,τ) ، وكانت U,V مجموعتين متباعدتين بالتبادل من النوع β_s^* في X بحيث أن $A \subseteq u \cup v$ عندئذ يكون:

إما $A \subseteq u$ أو $A \subseteq v$

البرهان :

لنفرض أن $A \subseteq u$ و $A \subseteq v$ عندئذ: $A=(A\cap U)\cup(A\cap V)$

ومن الفرض يكون لدينا $(A\cap U)\cap\beta_s^*Cl(A\cap V)\subset U\cap\beta_s^*Cl(V)=\phi$

أي أن $(A\cap U)\cap\beta_s^*Cl(A\cap V)=\phi$

وبشكل مماثل نجد أن: $(A\cap V)\cap\beta_s^*Cl(A\cap U)=\phi$ أصبح لدينا:

$(A\cap U)\cap\beta_s^*Cl(A\cap V)=\phi$ و $(A\cap V)\cap\beta_s^*Cl(A\cap U)=\phi$

بالتالي إذا كانت المجموعتان $(A\cap V)$ و $(A\cap U)$ مجموعتان غير خاليتان تصبح $A=\phi$ أي أن A ليست β_s^*–مترابطة وهذا يناقض الفرض بناء على ذلك فإن: $(A\cap V)=\phi$ أو $(A\cap U)=\phi$ومنه: إما $A \subseteq u$ أو $A \subseteq v$

<u>**مبرهنة 5:**</u>

إذا كانت A مجموعة β_s^*–مترابطة في فضاء تبولوجي (X,τ) وكانت Nمجموعة أخرى فيه بحيث أن: $A\subseteq N\subseteq\beta_s^*Cl(A)$ عندئذ تكون N مجموعة β_s^* – مترابطة .

البرهان:

نفرض أن N ليست مجموعة β_s^*–مترابطة عندئذ توجد مجموعتين متباعدتين بالتبادل من النوع β_s^* مثل Uو V ، بحيث أن $N=U\cup V$ بناء على ذلك U,V غير خالتين

ويكون $U\cap\beta_s^*Cl(V)=\phi=\beta_s^*Cl(U)\cap V$.

وبالاعتماد على النتيجة 2 نجد: إما $A\subseteq U$ أو $A\subseteq V$

لنفرض أن $A\subseteq U$ عندئذ : $\beta_s^*Cl(A)\subseteq\beta_s^*Cl(U)$ عندئذ يكون :

$\Leftarrow V\cap\beta_s^*Cl(A)\subseteq V\cap\beta_s^*Cl(U)$ لكن $V\cap\beta sCl(A)=\phi$ ......*

بالتالي من العلاقة * ومن الفرض أن $V \subseteq N \subseteq \beta_s^* Cl(A)$ يكون $V = V \cap \beta_s^* Cl(A) = \phi$ هذا تناقض لأن V مجموعة غير خالية.

وإذا كان $A \subseteq V$ بشكل مماثل نحصل على تناقض.

هذا التناقض سببه الفرض الجدلي الخاطئ أن N ليست β_s^*–مترابطة $\Leftarrow$ N مجموعة β_s^* – مترابطة.

نتيجة 3:إذا كانت A مجموعة β_s^*–مترابطة في فضاء تبولوجي (X,τ) عندئذ $\beta_s^* Cl(A)$ تكون β_s^*–مترابطة.

مبرهنة 6:

لتكن A,B مجموعتين β_s^*–مترابطتين وغير متباعدتين بالتبادل من النوع β_s^* في فضاء تبولوجي (X,τ) عندئذ تكون المجموعة $A \cup B$ مجموعة β_s^*–مترابطة.

البرهان:

نفرض أن $A \cup B$ مجموعة ليست β_s^*–مترابطة عندئذ توجد مجموعتين متباعدتين بالتبادل من النوع β_s^* مثل C,D في X بحيث أن: $A \cup B = C \cup D$

وعندئذ بحسب النتيجة 2 يكون إما $A \subset D$ أو $A \subset C$ وبشكل مماثل إما $B \subset D$ أو $B \subset C$.

إذا كان $A \subset C$ و $B \subset C$ عندئذ $A \cup B \subset C$ و $D = \phi$ وهذا تناقض بالتالي

إما ($A \subset C$ و $B \subset D$) أو ($A \subset D$ و $B \subset C$)

في الحالة الأولى عندما $A \subset C$ و $B \subset D$ يكون :

$$\beta_s^* Cl(A) \subset \beta_s^* Cl(C) \Rightarrow \beta_s^* Cl(A) \cap B \subset \beta_s^* Cl(C) \cap D = \phi$$

و يكون $\beta_s^* Cl(B) \cap A \subset \beta_s^* Cl(D) \cap C = \phi$

ومنه نستنتج أن: $\beta_s^* Cl(B) \cap A = \beta_s^* Cl(A) \cap B = \phi$

وبشكل مماثل في الحالة الثانية نجد أن A,B مجموعتان متباعدتان بالتبادل من النوع β_s^* في X وهذا تناقض سببه الفرض الجدلي الخاطئ بالتالي $A \cup B$ مجموعة β_s^* – مترابطة.

مبرهنة 7 :

إذا كان $f:(E,\tau) \to (Y,\sigma)$ تابعاً كيفياً وكانت x_0 نقطة مفروضة من (E,τ) عندئذ يكون التابع f مستمراً من النوع β_s^* عند النقطة x_0 إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

من أجل أي مجاورة v للنقطة $f(x_0)$ في (Y,σ) توجد مجاورة من النوع β_s^* مثل u للنقطة x_0 في (E,τ) بحيث $f(u) \subseteq v$

البرهان:

($\Leftarrow$): لدينا f تابع مستمر من النوع β_s^* عند النقطة x_0 ولتكن v مجاورة كيفية للنقطة $f(x_0)$ في (Y,σ) بحسب كون التابع f مستمراً من النوع β_s^* عند نقطة x_0 فإن $f^{-1}(v)$ مجاورة من النوع β_s^* للنقطة x_0 في (E,τ) وبذلك نكون قد أوجدنا $u = f^{-1}(v)$ مجاورة للنقطة x_0 في (E,τ) ، من ناحية ثانية $u = f^{-1}(v)$ $\Leftarrow$ $f(u) = f(f^{-1}(v))$ وحسب نظرية المجموعات فإن $f(f^{-1}(v)) \subseteq v$ بالتالي $f(u) \subseteq v$.

$(\Rightarrow)$: لدينا بالفرض أنه من أجل أي مجاورة v للنقطة $f(x_0)$ في (Y,σ) توجد مجاورة من النوع β_s^* مثل u للنقطة x_0 في (E,τ) بحيث يكون $f(u) \subseteq v$ ولنبرهن أن f مستمر من النوع β_s^* عند x_0 ، من الفرض أن $f(u) \subseteq v$ فإن $f^{-1}(f(u)) \subseteq f^{-1}(v)$ ومنه $u \subseteq f^{-1}(v)$ وبما أن u مجاورة من النوع β_s^* للنقطة x_0 في (E,τ) فإن $f^{-1}(v)$ مجاورة من النوع β_s^* للنقطة x_0 في (E,τ) وهذا يعني أن التابع f مستمراً من النوع β_s^* عند نقطة x_0.

مبرهنة 8:

ليكن $f:(X,\tau) \to (Y,\gamma)$ تقابلاً كيفياً مستمراً من النوع β_s^* بحيث أن الفضاء (X,τ) β_s^*-مترابط عندئذ يكون الفضاء (Y,σ) مترابطاً.

البرهان:

لدينا بالفرض أن f تطبيق مستمر من النوع β_s^* و X فضاء β_s^*-مترابط والمطلوب برهان أن Y مترابط، لنفرض جدلاً أنه غير مترابط هذا يعني وجود مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين في (Y,σ) مثل A,B بحيث يكون $Y = A \cup B$ بالتالي $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

وبما أن f مستمر من النوع β_s^* فإنه بحسب تعريف الاستمرار من النوع β_s^* تكون المجموعتان:

$f^{-1}(B)$ و $f^{-1}(A)$ مجموعتين مفتوحتين من النوع β_s^* في (X,τ)، وهذا يعني أن (X,τ) فضاء غير مترابط من النوع β_s^* وهذا تناقض بالتالي نجد أن (Y,σ) فضاء مترابط.

من المعلوم أن نظرية القيمة المتوسطة محققة من أجل التوابع الحقيقية المستمرة على مجال $[a,b]$ و سنبين أنها محققة من أجل التوابع β_s^*-مستمرة.

مبرهنة 9:

ليكن $f:(X,\tau) \to (R,\tau_{|.|})$ تطبيقاً مستمراً من النوع β_s^* حيث أن (X,τ) فضاء مترابط من النوع β_s^* و $(R,\tau_{|.|})$ الفضاء التبولوجي الحقيقي العادي ،إذا كانت x,y نقطتين من المجموعة المرتبة كلياً X بحيث أن $f(x)=a,\ f(y)=b$ عندئذ من أجل كل عدد حقيقي r بين a,b يوجد c من X بحيث أن $f(c)=r$.

البرهان: نفرض أنه لا توجد نقطة $c \in X$ تحقق أن $f(c)=r$ عندئذ $A =]-\infty, r[$ و $B =]r,+\infty[$ مجموعتين مفتوحتين في R وغير متقاطعتين، وبما أن f مستمر من النوع β_s^* فإن $f^{-1}(B), f^{-1}(A)$ مجموعتين مفتوحتين من النوع β_s^* و غير متقاطعتين في X ، ولدينا $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ أي أن X اجتماع لمجموعتين مفتوحتين من النوع β_s^* عندئذ يكون X فضاء غير مترابط من النوع β_s^* ، هذا تناقض سببه الفرض الجدلي الخاطئ بناء على ذلك توجد نقطة $c \in X$ بحيث $f(c)=r$.

الاستنتاجات والتوصيات:

قدمنا في هذا البحث مفهوماً جديداً هو المجموعة المفتوحة من النوع β_s^* ، واستفدنا من هذا المفهوم في تعريف الفضاء المترابط من النوع β_s^*ودراسة هذا الفضاء وعلاقته بالفضاءات المترابطة الآخرى.

كما عرَفنا التوابع المستمرة من النوع β_s^* وأثبتنا أن نظرية القيمة المتوسطة محققة من أجل التوابع المستمرة من النوع β_s^* .

نوصي بالآتي:

1. دراسة مفهوم التراص وفق المجموعات المفتوحة من النوع β_s^* .
2. دراسة موضوعات الفصل وفق المجموعات المفتوحة من النوع β_s^* .

References:

[1]-Levine, N., *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces,* Amer. Math. Monthly 70 , 1963 , 36-41.

[2]-Mashhour, A.S. ; Abd El-monsef, M. E. ; El-Deeb, S. N., *On precontinuous and weak precontinuous function*, Proc. Math. Phys.Soc. Egypt., Vol. 53, 1982 , 47-53.

[**3**]-Abd El-Monsef, M. E ; El-Deeb, S. N. ; Mamoud, R. A., β*-open sets and* β*-continuous mapping* , Bull. Fac. Assiut Univ. 12, 1983 , 77-90 .

[4]- Tyagi, B. K. ; Singh.S ; Bhardwaj, M., P_β*-connectedness in topological spaces*, Demonstr. Math. 50 , 2017, 299-308.

[5]- Tyagi, B. K. ; Singh.S. ; Bhardwaj, M., α_β *-connectedness as a characterization of connectedness*, J. Adv. Stud. Topo. 9 , 2018 , no. 2, 119-129.

[6]-Jafari, S. ; Noiri, T., *Properties of* β*-connected spaces,* Act Math. Hungar., 2003 , 101, 227-236.

[7]- Popa, V. ; Noiri, T., *Weakly* β *-continuous functions*, An. Univ. Timisoara Ser. Mat. Inform., 32 ., 1994 , 83-92.