النقاط منتهية الرتبة على المنحنيات المعيارية

د. حسن سنكري*

مصطفى بوجقلي**

(تاريخ الإيداع 9 / 8 / 2020. قُبِل للنشر في 23 / 2 /2021)

□ ملخّص □

ليكن K حقلاً تربيعياً و $X(N)(K)$ منحنيات معيارية و $J(N)(K)$ منحنيات جاكوبيان للمنحنيات المعيارية $X(N)$ معرفة فوق الحقل K. درسنا في هذا البحث النقاط منتهية الرتبة على المنحنيات المعيارية $X(N)$ وزمرة Mordell–Weil على منحنيات جاكوبيان $J(N)$. برهنا في هذا البحث أن زمرة Weil–Mordell لمنحنيات جاكوبيان $J(N)$ فوق الحقل $\mathbb{Q}$ منتهية وأن المنحنيات المعيارية $X(N)$ لاتملك نقاطاً في الحقل K رتبتها N عندما $N = 17,19,23,29,31$. أما في حال $N = 18$ وجدنا أن زمرة Mordell–Weil لمنحني جاكوبيان $J_1(18)(K_1)$ فوق الحقل K_1 منتهية حيث K_1 حقل تربيعي تخيلي، واستنتجنا أن المنحني المعياري $X_1(18)$ لا يملك نقاطاً في K_1 رتبتها 18.

الكلمات المفتاحية: المنحنيات المعيارية – المنحنيات الإهليليجة – النقاط ذات رتبة منتهية.

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية– البريد الالكتروني: hasan.sankari2@gmail.com.

** طالب دكتوراه – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية – البريد الالكتروني: mustafa.bojakli@gmail.com.

Torsion Points on Modular Curves

Dr. Hasan Sankari*
Mustafa Bojakli**

(Received 9 / 8 / 2020. Accepted 23 / 2 /2021)

□ ABSTRACT □

Let K be a quadratic field. Let $X(N)(K)$ be modular curves and $J(N)(K)$ be Jacobian curves of modular curves defined over K. In this paper, we investigate torsion points on modular curves $X(N)$ and the Mordell-Weil group of the Jacobian curves $J(N)$. Let N be one of the primes 17,19,23,29,31. We prove that the Mordell-Weil group of the Jacobian curves $J(N)$ over $\mathbb{Q}$ is finite and the modular curves $X(N)$ have no K-points of order N. Whereas in case $N = 18$, we find the Jacobian curves $J_1(18)(K_1)$ has a finite Mordell-Weil group over K_1 where K_1 is an imaginary quadratic field and conclude that the modular curves $X_1(18)$ has no K_1-points of order 18.

Keywords: modular curves, elliptic curves, torsion points.

* **Professor – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tishreen University – Lattakia – Syria – Email: hasan.sankari2@gmail.com.**
** **PhD student – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tishreen University – Lattakia – Syria – Email: mustafa.bojakli@gmail.com.**

مقدمة:

تعد المنحنيات المعيارية من المواضيع الهامة والأساسية في الهندسة الجبرية وهندسة المنحنيات، حيث تربط مبرهنة Shimura–Taniyama–Weil بين المنحنيات المعيارية والاهليليجية، وتنص هذه المبرهنة على أنه من أجل كل منحني إهليليجي E معرف فوق الحقل $\mathbb{Q}$ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث يكون المورفيزم $X_0(N) \to E$ غامراً. لذلك تتعلق دراسة المنحنيات المعيارية بشكل أساسي في دراسة المنحنيات الإهليليجية.
ليكن K حقلاً و $E(K)$ منحنياً إهليليجياً معرفاً فوق الحقل K. تنص مبرهنة Mordell–Weil على أن مجموعة النقاط K–الكسرية تشكل زمرة تبديلية منتهية التوليد، أي أنَّ:

$$E(K) \cong E(K)_{tors} \oplus \mathbb{Z}^r;$$

حيث $E(K)_{tors} = \{P \in E(K); NP = \infty\}$ زمرة جزئية في $E(K)$ وتسمى زمرة النقاط منتهية الرتبة (Torsion points) و r رتبة المنحني الإهليليجي، وتسمى $E(K)$ زمرة Mordell–Weil للمنحني الإهليليجي E فوق الحقل K [1].

إن أحد أهم المسائل المطروحة في الهندسة الجبرية وهندسة المنحنيات هو إيجاد الزمرة $E(K)_{tors}$ فوق حقلٍ كيفي، إذا كان $K = \mathbb{Q}$ فإن المسألة قد حلت من قبل Mazur [2] حيث برهن أن الزمرة $E(K)_{tors}$ إيزومورفيزمية مع **واحدة** من الزمر الآتية:

$$\begin{cases} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & ; m = 1,2,..,10,12, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z} & ; m = 1,..,4. \end{cases}$$

وفي حال كان K حقلاً تربيعياً، برهن Kamienny [3] بالاعتماد على عمل Momose و Kenku [4] أن الزمرة $E(K)_{tors}$ إيزومورفيزمية مع **واحدة** من الزمر الآتية:

$$\begin{cases} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; 1 \le m \le 18, m \ne 17, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}; 1 \le m \le 6, \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3m\mathbb{Z}; 1 \le m \le 2, \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4m\mathbb{Z}. \end{cases}$$

وتسمى مبرهنة Kamienny–Momose–Kenku.
وإذا كان K حقلاً تكعيبياً، وجد Dericks [5] و Parent [6] حلولاً لهذه المسألة في بعض الحالات الخاصة لـ K، بينما المسألة لم تحل في حال كان K توسيعاً للحقل $\mathbb{Q}$ من الدرجة الرابعة أو أكثر.

ظهرت العديد من الأسئلة في حال كان K حقلاً تربيعياً، وأحد هذه الأسئلة هو: هل يوجد منحني إهليليجي معرف فوق حقل تربيعي $K = \mathbb{Q}(\sqrt{N})$ يحوي نقاطاً في K رتبتها تساوي N؟ وبالتالي يمكن السؤال: هل يوجد منحني معياري معرف فوق K يملك نقاطاً في K رتبتها N؟

تعتمد الإجابة على هذا السؤال على وجود منحنيات معيارية ليست فوق إهليليجية (Hyperelliptic) تملك أكثر من فجوتين بحيث أن زمرة Mordell–Weil لمنحنيات جاكوبيان للمنحنيات المعيارية فوق $\mathbb{Q}$ منتهية، ومنه يمكن إيجاد زمرة النقاط منتهية الرتبة للمنحنيات المعيارية فوق الحقول التربيعية.

ليكن $X(N)$ منحنياً معيارياً، و $J(N)$ منحني جاكوبيان لـ $X(N)$، عندئذٍ $J(N)(\mathbb{Q}) = J_0(N)(\mathbb{Q}) \times A(\mathbb{Q})$ حيث $J_0(N)$ و A تشكيلات جبرية غير مختزلة، ومنه:

- إذا كان $X(N)$ منحنياً معيارياً فوق إهليليجي، عندئذٍ $X(N)$ يملك نقاطاً في K رتبتها N.
- إذا كان $X(N)$ منحنياً معيارياً ليس فوق إهليليجي، عندئذٍ نميز حالتين:
  - إذا كانت $J_0(N)(\mathbb{Q})$ زمرة غير منتهية، فإن $X(N)$ يملك نقاطاً في K رتبتها N.
  - إذا كانت $J_0(N)(\mathbb{Q})$ زمرة منتهية، فيجب إيجاد زمرة Mordell–Weil للتشكيل الجبري A.

أوجدنا في هذا البحث بعضاً من المنحنيات المعيارية فوق الحقول التربيعية K وبرهنا أن زمرة Mordell–Weil لمنحنيات جاكوبيان لها فوق $\mathbb{Q}$ منتهية وأنها لاتملك نقاطاً في $K = \mathbb{Q}(\sqrt{N})$ رتبتها N.

نذكر فيما يلي بعضاً من الدراسات السابقة: وجد Bokun [7] منحنيات إهليليجية معرفة فوق حقولٍ تربيعية بحيث أن الزمرة $E(K)_{tors}$ إيزومورفيزمية مع الزمر الآتية $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{10\mathbb{Z}}$ و $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$ و $\mathbb{Z}/_{11\mathbb{Z}}$ و $\mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}}$ و $\mathbb{Z}/_{15\mathbb{Z}}$، ووجد Kamienny و Najman [8] طريقة لإيجاد الزمرة $E(K)_{tors}$ فوق حقول تربيعية محددة، ودرس Gonzalez و Ternero [9] [10] الزمرة $E(K)_{tors}$ فوق بعض الحقول التربيعية والعلاقة بين الزمرتين $E(K)_{tors}$ و $E(\mathbb{Q})_{tors}$. وحدد Kagwa [11] 22 منحنياً إهليليجياً بحيث تكون الزمرة $E(K)_{tors}$ إيزومورفيزمية مع الزمر $\{0\}$ و $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ و $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$، وبرهن Najman [12] أن زمرة النقاط منتهية الرتبة للمنحنيات المعيارية فوق بعض الحقول التكعيبية منتهية ووجد عدد غير منته من المنحنيات المعيارية تحوي نقاطاً رتبتها 14، ووجد [13] Dericke و Najman منحنيات إهليليجية لبعض الزمر الواردة في مبرهنة Kamienny–Momose–Kenku فوق الحقول التكعيبية الدورية، بالإضافة إلى العديد من الدراسات المرجعية.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى برهان أن زمرة Mordell–Weil لمنحنيات جاكوبيان للمنحنيات المعيارية منتهية فوق الحقل $\mathbb{Q}$، بالإضافة إلى إيجاد نقاطٍ على المنحنيات المعيارية في حقول تربيعية رتبتها منتهية، وتكمن أهمية هذا البحث في إيجاد الزمر $E(K)_{tors}$ للمنحنيات الإهليليجية فوق الحقول التربيعية ومنه إيجاد الزمر $E(K)_{tors}$ للمنحنيات المعيارية فوق الحقول التربيعية.

طرائق البحث ومواده:

استخدمنا الهندسة الجبرية في برهان التمهيديات والمبرهنات في هذا البحث وبشكل خاص القواسم والقواسم الرئيسية ومنحني جاكوبيان والزمر المخططة ومودل Neron، واعتمدنا على الزمر الهمولوجية والسلاسل الصحيحة القصيرة في الهمولوجيا بالإضافة إلى العديد من المفاهيم والنتائج في الجبر.

التعاريف والمبرهنات الأساسية والرموز المستخدمة:

نذكر فيما يلي مجموعة من التعاريف الأساسية وبعض الملاحظات التي تساعدنا في فهم المصطلحات العلمية الواردة في البحث وتوضيح برهان المبرهنات الواردة فيه.

تعريف 1 [14]: ليكن N عدداً صحيحاً موجباً، و Δ زمرة جزئية في الزمرة $\left(\mathbb{Z}/_{N\mathbb{Z}}\right)^{*}$.

- يُعرف المنحني المعياري (modular curve) $X_0(N)(K)$ فوق الحقل K بأنه منحني كل نقطة فيه تقابل صفاً ايزومورفيزمياً من المنحنيات الإهليليجية E التي تملك زمرة جزئية دورية من النقاط الكسرية رتبتها N.
- يُعرف المنحني المعياري $X_1(N)(K)$ فوق الحقل K بأنه منحني كل نقطة فيه تقابل صفاً ايزومورفيزمياً من المنحنيات الإهليليجية التي تملك نقطة كسرية رتبتها N.
- يُعرف المنحني المعياري المتوسط (intermediate modular curve) $X_\Delta(N)(K)$ فوق الحقل K بأنه منحني كل نقطة فيه تقابل صفاً ايزومورفيزمياً من المنحنيات الإهليليجية التي تملك نقطة كسرية رتبتها N وتكون المجموعة $\{ap; a \in \Delta\}$ ثابتة بالنسبة لزمرة $Gal(\overline{K}, K)$.

تعريف 2 [1]: ليكن C منحنياً عدد فجواته g،

- تُعرف زمرة القواسم (Divisor group) $Div(C)$ بأنها زمرة حرة تبديلية مولدة بنقاط على المنحني C.
- يقال عن $D \in Div(C)$ بأنه قاسمٌ رئيسيٌ (principle divisor) إذا كان $D = div(f)$ حيث $f \in k(C)$ و $k(C)$ حقل كسور الحلقة $k[x,y]/_{I(C)}$.
- يُعرف منحني جاكوبيان (Jacobian curve) بأنه تشكيل جبري (Algebraic variety) عدد فجواته g معرفٌ بالشكل الآتي:

$$\mathrm{Pic(C)} = \mathrm{Div(C)}/_{\mathrm{PDiv(C)}}.$$

لتكن $J_0(N), J_\Delta(N), J_1(N)$ منحنيات جاكوبيان للمنحنيات المعيارية $X_0(N), X_\Delta(N), X_1(N)$ على الترتيب، عندئذٍ يوجد تطبيق Abel–jacobi معرف بالشكل الآتي:

$$X_\Delta(N) \hookrightarrow J_\Delta(N) \twoheadrightarrow J_\Delta(N)/_{J_0(N)} = A$$

لتكن $\overline{G}$ زمرة جزئية من النقاط الكسرية في $J_\Delta(N)$ والزمرة G مسقط الزمرة $\overline{G}$ على A، برهن Kubret و Lang [15] و Steven [16] أن الزمرة G منتهية، وليكن q عدداً أولياً يحقق $q \mid |G|$ عندئذٍ يوجد هومومرفيزم زمر $[q]: G \to$

بحيث أن $G; [q]P = qP$. $G_q = \ker q \cong \mathbb{Z}/_{q\mathbb{Z}}$. ويُعرف جبر Hecke (Hecke algebra) $\mathbb{T}$ بأنه حلقة الاندومورفيزمات لـ A، وفي حال كان N عدداً أولياً فإن جبر Hecke هو جبر منتهي التوليد فوق $\mathbb{Z}$. وعرف Eisenstein التطبيق $\mathbb{T} \to End(G)$ وبرهن أن نواته منتهية وتسمى إيديال Eisenstein [2].

نذكر في الجدول الآتي المنحنيات المعيارية التي قمنا بدراستها ومنحنيات جاكوبيان وبعدها $(\dim J(N) = g)$ وبعد A $(\dim A = \dim J_\Delta(N) - \dim J_0(N))$ وجبر Hecke $\mathbb{T}$ والعدد q الموافق لها حيث ξ_n جذور الواحدة من الدرجة n.

الجدول (1): منحنيات جاكوبيان وبعدها وجبر Hecke والعدد q.

$J(N)$	Δ	$\dim J(N)$	$\dim A$	$\mathbb{T}$	q
$J_1(17)$	$\Delta = \{\pm 1\}$	5	4	$\mathbb{Z}[\xi_8]$	73
$J_1(18)$	$\Delta = \{\pm 1\}$	2	0	$\mathbb{Z}[\xi_3]$	7
$J_1(19)$	$\Delta = \{\pm 1\}$	7	6	$\mathbb{Z}[\xi_9]$	487
$J_1(23)$	$\Delta = \{\pm 1\}$	12	10	$\mathbb{Z}[\xi_{11}]$	37181
$J_\Delta(29)$	$\Delta = \{\pm 1, \pm 12\}$	8	6	$\mathbb{Z}[\xi_7]$	43
$J_\Delta(31)$	$\Delta = \{\pm 1, \pm 5, \pm 6\}$	6	4	$\mathbb{Z}[\xi_5]$	11

نلاحظ من الجدول السابق أن العدد q ينشطر كلياً في الحلقة $\mathbb{T}$ إلى جداء إيديالات أولية وليكن π أحدها، عندئذٍ π إيديال Eisenstein أولي وبالتالي $A[\pi]$ فضاء شعاعي فوق $\mathbb{F}_q$ بعده 2 [17].

مبرهنة 1 Eichler–Shimura [17]: توجد سلسلة صحيحة قصيرة من المودولات فوق $Gal(\bar{K}, K)$ من الشكل الآتي:

$$0 \to G_q \to A[\pi] \to \mu_q[\epsilon] \to 0$$

حيث $\mu_q[\epsilon]$ حزمة Skyscraper (Skyscraper sheaf) و $\epsilon \in E_n$ و E_n حقل جزئي في $\mathbb{Q}(\xi_N)$ درجته n.

مبرهنة 2 [18]: ليكن S فضاءً مخططاً أفينياً (affine scheme) و $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ سلسلة صحيحة قصيرة من الزمر، عندئذٍ توجد سلسلة طويلة صحيحة من اليسار من الزمر الهمولوجية بالشكل الآتي:

$$0 \to H^0(S, G_1) \to H^0(S, G_2) \to H^0(S, G_3) \to H^1(S, G_1) \to H^1(S, G_2) \to H^1(S, G_3)$$
$$\to H^2(S, G_1) \to H^2(S, G_2) \to H^2(S, G_3) \to \cdots$$

النتائج والمناقشة:

ليكن π إيديال Eisenstein الأولي في حلقة Hecke $\mathbb{T}$ مولداً بالعدد η، وليكن $\mathcal{N}$ مودل Neron لـ A (Neron model) فوق الفضاء المخطط الأفيني S حيث $S = specO_{E_n}$، سنبرهن أن زمرة Mordell–Weil لمنحنيات جاكوبيان $J_\Delta(N)$ فوق $\mathbb{Q}$ منتهية وأن المنحنيات المعيارية $X_\Delta(N)$ لا تملك نقاط في K رتبتها N عندما $N = 17,19,23,29,31$، وذلك بالإستفادة من التمهيديات الآتية:

تمهيدية 1: توجد سلسلة صحيحة قصيرة من الزمر المخططة المسطحة (flat) المنتهية فوق S من الشكل الآتي:

$$0 \to \mathbb{Z}/_{q\mathbb{Z}} \to \mathcal{N}[\eta] \to \mu_q[\epsilon] \to 0. \qquad (1)$$

البرهان: لدينا $\mathcal{N}$ مودل Neron لـ A فوق $S = spec\mathcal{O}_{E_n}$ عندئذٍ $\mathcal{N}$ زمرة مخططة تبديلية فوق S، ومنه توجد السلسلة الصحيحة القصيرة الآتية:

$$0 \to \mathcal{N}[\eta] \to \mathcal{N} \xrightarrow{\eta} \mathcal{N} \to 0, \qquad (2)$$

عندئذٍ $\mathcal{N}[\eta]$ زمرة جزئية في $\mathcal{N}$ منتهية ومسطحة.

لتكن Z زمرة جزئية $\mathcal{N}[\eta]$ تحوي G_q عندئذٍ Z زمرة منتهية ومنه توجد السلسلة الصحيحة القصيرة الآتية:

$$0 \to G_q \to \mathcal{N}[\eta] \to Z \to 0,$$

ولدينا $G_q \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$، وبالتالي تصبح السلسلة بالشكل الآتي:

$$0 \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathcal{N}[\eta] \to Z \to 0.$$

بما أن $q > 2$ عندئذٍ حسب مبرهنة Oort–Tate [19] فإن Z زمرة مخططة ثابتة رتبتها q وبالتالي حسب مبرهنة Eichler–Shimura فإن $Z = \mu_q[\epsilon]$ وبالتالي توجد السلسلة الصحيحة القصيرة بالشكل الآتي:

$$0 \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathcal{N}[\eta] \to \mu_q[\epsilon] \to 0.$$

تمهيدية 2: الزمرة $A(\mathbb{Q})$ منتهية.

البرهان: لدينا من (2) السلسلة الصحيحة القصيرة الآتية:

$$0 \to \mathcal{N}[\eta] \to \mathcal{N} \xrightarrow{\eta} \mathcal{N} \to 0.$$

توجد حسب المبرهنة (2) سلسلة طويلة صحيحة من اليسار معرفة فوق S بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(S, \mathcal{N}[\eta]) \to H^0(S, \mathcal{N}) \to H^0(S, \mathcal{N}) \\ &\to H^1(S, \mathcal{N}[\eta]) \to H^1(S, \mathcal{N}) \to H^1(S, \mathcal{N}) \to \cdots \end{aligned}$$

وتصبح السلسلة بالشكل الآتي:

$$0 \to \mathcal{N}(S)[\eta] \to \mathcal{N}(S) \xrightarrow{\eta} \mathcal{N}(S) \to H^1(S, \mathcal{N}[\eta]) \to \cdots$$

وبالتالي يوجد هومومرفيزم زمر متباين الآتي:

$$\mathcal{N}(S)/\eta\mathcal{N}(S) \hookrightarrow H^1(S, \mathcal{N}[\eta]).$$

بما أن $\mathcal{O}_{E_n}$ حلقة الأعداد الجبرية للحقل E_n عندئذٍ:

$$A(E_n)/\eta A(E_n) = \mathcal{N}(S)/\eta\mathcal{N}(S) \hookrightarrow H^1(S, \mathcal{N}[\eta]). \qquad (3)$$

ولنبرهن أن الزمرة $H^1(S, \mathcal{N}[\eta])$ منتهية.

بتطبيق المبرهنة (2) على السلسلة الصحيحة القصيرة (1) توجد سلسلة صحيحة طويلة معرفة فوق S بالشكل الآتي:

$$\cdots \to H^1\left(S, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\right) \to H^1(S, \mathcal{N}[\eta]) \to H^1(S, \mu_q[\epsilon]) \to \cdots \qquad (4)$$

بما أن $\left(q, cl(E_n)\right) = 1$ عندئذٍ:

$$H^1\left(S, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\right) \cong Hom\left(cl(E_n), \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\right) = 0.$$

برهن Kamienny أنّ [17]:

$$H^1\left(S,\mu_q[\epsilon]\right) = {}^{U}\!/_{U^q}$$

حيث U زمرة الواحدة في E_n، وبما أن $q \equiv 1(mod\ n)$ فإن:

$$H^1\left(S,\mu_q[\epsilon]\right) = \oplus_{\sigma\in G}\ {}^{U}\!/_{U^q}\,(\sigma);\ G = Gal(E_n,\mathbb{Q}), \tag{5}$$

ومنه تصبح السلسلة (4) بالشكل الآتي:

$$\cdots \to 0 \to H^1(S,\mathcal{N}[\eta]) \to H^1\left(S,\mu_q[\epsilon]\right) \to \cdots$$

وبالتالي يوجد هومومرفيزم زمر متباين الآتي:

$$H^1(S,\mathcal{N}[\eta]) \hookrightarrow H^1\left(S,\mu_q[\epsilon]\right),$$

وحسب السلسلة (3) يكون:

$${}^{A(E_n)}\!/_{\eta A(E_n)} \hookrightarrow H^1(S,\mathcal{N}[\eta]) \hookrightarrow H^1\left(S,\mu_q[\epsilon]\right).$$

نجد من السلسلة (5) هومومرفيزم الزمر:

$${}^{A(E_n)}\!/_{\eta A(E_n)} \hookrightarrow \oplus_{\sigma\in G}\ {}^{U}\!/_{U^q}\,(\sigma),$$

وبتطبيق زمرة غالوا G نجد أنّ:

$$\left({}^{A(E_n)}\!/_{\eta A(E_n)}\right)^G \hookrightarrow \left(\oplus_{\sigma\in G}\ {}^{U}\!/_{U^q}\,(\sigma)\right)^G,$$

ومنه:

$${}^{A(\mathbb{Q})}\!/_{\eta A(\mathbb{Q})} \hookrightarrow \oplus_{\sigma\in G}\ {}^{U}\!/_{U^q}\,(\epsilon^{-1}).$$

حسب [3] إنّ ${}^{U}\!/_{U^q}\,(\epsilon^{-1})$ فضاء شعاعي فوق $\mathbb{F}_q$ بعده 1 وبالتالي زمرة منتهية وعليه تكون الزمرتان $H^1(S,\mathcal{N}[\eta])$ و $H^1\left(S,\mu_q[\epsilon]\right)$ منتهيتان ومنه الزمرة ${}^{A(\mathbb{Q})}\!/_{\eta A(\mathbb{Q})}$ منتهية وبالتالي الزمرة $A(\mathbb{Q})$ منتهية.

مبرهنة 3: زمرة Mordell–Weil لمنحني جاكوبيان $J_\Delta(N)(\mathbb{Q})$ منتهية.

البرهان: لدينا $J_\Delta(N)(\mathbb{Q})$ تشكيل جبري (من تعريف منحني جاكوبيان) وبالتالي ينشطر إلى جداء تشكيلات جبرية، أي يكتب الشكل الآتي:

$$J_\Delta(N)(\mathbb{Q}) = J_0(N)(\mathbb{Q}) \times A(\mathbb{Q});\ A(\mathbb{Q}) = {}^{J_\Delta(N)(\mathbb{Q})}\!/_{J_0(N)(\mathbb{Q})}.$$

لـدينا الزمـرة $J_0(N)(\mathbb{Q})$ منتهيـة [2]، وبرهنـا فـي التمهيديـة (2) أن الزمـرة $A(\mathbb{Q})$ منتهيـة وبالتـالي تكـون زمـرة Mordell–Weil لـ$J_\Delta(N)(\mathbb{Q})$ منتهية.

مبرهنــة 4: لـيكن K حقـلاً تربيعيـاً كيفيـاً و $X_\Delta(N)(K)$ منحنيـاً معياريـاً معرفـاً فـوق K، عندئـذٍ المنحنـي المعيـاري $X_\Delta(N)$ لا يملك نقاطاً في K رتبتها N.

البرهان: لتكن Y نقطة كيفية على المنحني $X_\Delta(N)$ وبالتالي Y تقابل صفاً ايزومورفيزماً من المنحنيات الإهليليجية (E,p) حيـث $Np=\infty$ والمجموعـة $\{ap \in E;\ a \in \Delta\}$ ثابتـة بالنسـبة لزمـرة غـالوا $Gal(K,\mathbb{Q})=\{I,\sigma\}$. بحيث $\sigma(Y)=\bar{Y}$ ومنه Y و $\bar{Y}$ نقطتان مختلفتان على المنحني المعياري $X_\Delta(N)$ وعليه يكون $Y+\bar{Y}$ قاسم عليه و $Y+\bar{Y}-2\infty$ قاسم رئيسي على المنحني $J_\Delta(N)$. وليكن $M=Y(\mathbb{F}_3)$ و $N=\bar{Y}(F_3)$ مقصور المنحنيين Y و $\bar{Y}$ بالنسبة للحقل $\mathbb{F}_3$ عندئذٍ M و N منحنين معرفين فوق الحقل $\mathbb{F}_3$ يحويان 16 نقطة على الأكثر [1]، بما أن $N>16$ وزمرة Mordell–Weil على $J_\Delta(N)$ منتهية حسب المبرهنة (3) عندئذٍ القاسمان الرئيسيان $Y+\bar{Y}-2\infty$ و $M+N-2\infty$ متكافئان فوق $\mathbb{Q}$ ومنه $Y+\bar{Y}-M-N$ قاسم يكافئ 0 وبالتالي قاسم رئيسي، أي أنه يوجد $f \in K(X_\Delta)$ بحيث يكون $Y+\bar{Y}-M-N=div(f)$ وهذا غير ممكن، ومنه الصف من المنحنيات الإهليليجية (E,p) غير موجود أي أنّ النقطة Y غير موجودة وبالتالي المنحني المعياري $X_\Delta(N)$ لا يملك نقاطاً في الحقل التربيعي K رتبتها N.

سنبرهن في المبرهنة الآتية أن زمرة Mordell–Weil لمنحني جاكوبيان $J_1(18)(K_1)$ منتهية حيث K_1 حقل تربيعي تخيلي كيفي، ونستنتج أن المنحني المعياري $X_1(18)$ لا يملك نقاطاً فوق K_1 رتبتها 18.

مبرهنة 5: زمرة Mordell–Weil لمنحني جاكوبيان $J_1(18)(K_1)$ منتهية.

البرهان: لدينا $J_1(18)(K_1)$ منحني جاكوبيان للمنحني المعياري $X_1(18)(K_1)$ و $\mathbb{Z}[\xi_3]$ جبر Hecke و $q=7$، عندئذٍ $\pi\bar{\pi}=(7)$ حيث π إيديال Eisenstein أولي في الحلقة $\mathbb{Z}[\xi_3]$. وبما أن $\mathbb{Z}[\xi_3]$ ساحة إيديالات رئيسية فإن $\pi=(\eta)$.

لنعرف $\Delta_{K_1}=\{\varphi \in \mathcal{O}_{K_1};\ \varphi|2, \varphi|3\}$ و $S_1=spec\mathcal{O}_{K_1}-\Delta_{K_1}$، وليكن $\mathcal{A}$ مودل Neron لـ $J_1(18)$ فوق $spec\mathcal{O}_{K_1}$ عندئذٍ $\mathcal{A}(spec\mathcal{O}_{K_1})=J_1(18)(K_1)$. وبالتالي لكي تكون زمرة Mordell–Weil لـ $J_1(18)(K_1)$ منتهية يجب أن نبرهن أن مودل Neron $\mathcal{A}(spec\mathcal{O}_{K_1})$ منتهي ولذلك يكفي برهان أن الزمرة $A(spec\mathcal{O}_{K_1})$ منتهية حيث A فضاء مخطط جزئي مفتوح في $\mathcal{A}$.

لدينا السلسلة الصحيحة القصيرة من الزمر المخططة الآتية:

$$0 \to A[\eta] \to A \to A \to 0 \qquad (6)$$

ومنه $A[\eta]$ زمرة مخططة مسطحة شبه منتهية فوق $spec\mathcal{O}_{K_1}$ وبالتالي $A[\eta]$ زمرة مخططة مسطحة منتهية فوق S_1. وبتطبيق المبرهنة (2) على السلسلة (6) فوق $spec\mathcal{O}_{K_1}$ نحصل على السلسلة الصحيحة الآتية:

$$0 \to H^0(spec\mathcal{O}_{K_1}, A[\eta]) \to H^0(spec\mathcal{O}_{K_1}, A) \to H^0(spec\mathcal{O}_{K_1}, A) \to H^1(spec\mathcal{O}_{K_1}, A[\eta]) \to \cdots$$

ومنه نجد السلسلة الصحيحة الآتية:

$$0 \to A(spec\mathcal{O}_{K_1})[\eta] \to A(spec\mathcal{O}_{K_1}) \to A(spec\mathcal{O}_{K_1}) \to H^1(spec\mathcal{O}_{K_1}, A[\eta]) \to \cdots$$

وبالتالي تكون الزمرة $H^1\left(specO_{K_1}, A[\eta]\right)$ منتهية إذا كانت الزمرة $A\left(specO_{K_1}\right)$ منتهية. ولبرهان ذلك يجب أن نبرهن أن الزمرتين $H^1\left(specO_{K_1}, \overline{\mu_7}\right)$ و $H^1\left(specO_{K_1}, \overline{G}\right)$ منتهيتان.

لدينا السلسلة الصحيحة القصيرة الآتية [20]:

$$1 \to \overline{\mu_7} \to \mu_7 \to \mu_7 \to 1$$

حيث μ_7 حزمة skyscraper فوق S_1 و $\overline{\mu_7}$ توسيع للحزمة μ_7 فوق $specO_{K_1}$.

وبالتالي توجد سلسلة صحيحة طويلة من الشكل الآتي:

$$1 \to H^1\left(specO_{K_1}, \overline{\mu_7}\right) \to H^1\left(specO_{K_1}, \mu_7\right) \to H^1\left(specO_{K_1}, \mu_7\right) \to \cdots \qquad (7)$$

من جهة ثانية لدينا سلسلة Kummer الصحيحة القصيرة الآتية [21]:

$$0 \to {O^*_{K_1}}\Big/{\left(O^*_{K_1}\right)^7} \to H^1\left(specO_{K_1}, \mu_7\right) \to Pic\left(O_{K_1}\right)[7] \to 1,$$

وبما أن K_1 حقل تربيعي تخيلي فإن ${O^*_{K_1}}\Big/{\left(O^*_{K_1}\right)^7} = \{1\}$، و $\left(cl(K_1), 7\right) = 1$ فإن $Pic\left(O_{K_1}\right)[7] = \{\infty\}$ وبالتالي $H^1\left(specO_{K_1}, \mu_7\right) = \{0\}$ ومنه تصبح السلسلة (7) بالشكل الآتي:

$$1 \to H^1\left(specO_{K_1}, \overline{\mu_7}\right) \to 0 \to 0 \to \cdots$$

وعليه تكون $H^1\left(specO_{K_1}, \overline{\mu_7}\right) = \{0\}$.

الأن لنبرهن أن الزمرة $H^1\left(specO_{K_1}, \overline{G}\right)$ منتهية. لنعرف المجموعة $\Delta_E = \{\varphi \in specO_E; \varphi|2, \varphi|3\}$ و $T = specO_E - \Delta_E$، إستناداً إلى مبرهنة Mazur [2] فإننا نجد هومومرفيزم الزمر المتباين الأتي:

$$H^1\left(specO_{K_1}, \overline{G}\right) \hookrightarrow H^1(T, G) \cong H^1\left(T, {\mathbb{Z}}/{7\mathbb{Z}}\right).$$

والسلسلة الصحيحة الآتية:

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1\left(specO_E, {\mathbb{Z}}/{7\mathbb{Z}}\right) \to H^1\left(T, {\mathbb{Z}}/{7\mathbb{Z}}\right) \to H^2_\Delta\left(specO_E, {\mathbb{Z}}/{7\mathbb{Z}}\right) \\ &\to H^2\left(specO_E, {\mathbb{Z}}/{7\mathbb{Z}}\right) \to \cdots \end{aligned} \qquad (8)$$

حيث:

$$H^2_\Delta\left(specO_E, {\mathbb{Z}}/{7\mathbb{Z}}\right) = \bigoplus_{\varphi \in \Delta_E} H^2\left(specO_{E,\varphi}, {\mathbb{Z}}/{7\mathbb{Z}}\right).$$

بما أن $7 \notin \Delta_E$ عندئذٍ $H^2\left(specO_{E,\varphi}, {\mathbb{Z}}/{7\mathbb{Z}}\right) = \{0\}$ وبالتالي $H^2_\Delta\left(specO_E, {\mathbb{Z}}/{7\mathbb{Z}}\right) = \{0\}$ ومنه تصبح السلسلة (8) بالشكل الآتي:

$$0 \to H^1\left(specO_E, {\mathbb{Z}}/{7\mathbb{Z}}\right) \to H^1\left(T, {\mathbb{Z}}/{7\mathbb{Z}}\right) \to 0,$$

وبالتالي:

$$H^1\left(specO_E, \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}\right) \cong H^1\left(T, \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}\right).$$

من جهة ثانية لدينا:

$$H^1\left(specO_E, \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}\right) \cong Hom\left(cl(E), \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}\right) = 0,$$

وبالتـالي $\{0\} = H^1\left(specO_E, \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}\right)$ و $H^1\left(T, \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}\right) = \{0\}$ و $H^1(T, G) = \{0\}$ ومنـه تكـون $H^1\left(specO_{K_1}, \bar{G}\right) = \{0\}$.

ممـا سـبق نجـد أن الزمـرة $H^1\left(specO_{K_1}, A[\eta]\right)$ منتهيـة ومنـه تكـون الزمـرة $A(specO_{K_1})$ منتهيـة وزمرة Mordell–Weil لمنحني جاكوبيان $J_1(18)(K_1)$ منتهية.

نتيجـة 1: وجـدنا فـي المبرهنـة (5) أن $H^1\left(specO_{K_1}, \bar{\mu_7}\right) = \{0\}$ و $H^1\left(specO_{K_1}, \bar{G}\right) = \{0\}$ وبالتـالي $H^1\left(specO_{K_1}, A[\eta]\right) = \{0\}$ وبالتالي المنحني $X_\Delta(18)(K_1)$ لا يملك نقاط في K_1 رتبتها 18.

الاستنتاجات والتوصيات:

استخدمنا في هذا البحث الهندسة الجبرية والهمولوجيا وبشكل خاص السلاسل الصحيحة من الزمر الهمولوجية المعرفة فوق الفضاءات المخططة و اعتمدنا على مفهوم القواسم والقواسم الرئيسية ومودل Neron لايجاد زمرة Mordell–Weil لمنحنيات جاكوبيان وزمرة النقاط منتهية الرتبة فوق المنحنيات المعيارية، ونوصي بإيجاد النقاط منتهية الرتبة على منحنيات معيارية أخرى معرفة فوق حقلٍ تربيعي أو فوق حقلٍ تكعيبي، و إيجاد زمرة Mordell–Weil لمنحني جاكوبيان $J_1(18)$ فوق حقل تربيعي حقيقي.

Reference:

[1] SILVERMAN, J. *The arithmetic of elliptic curves*, Springer-Verlag, New York, 2009, 513.

[2] MAZUR, B. *Modular curves and the Eisenstein ideal*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., Vol. 47, 1977, 33-186.

[3] KAMIENNY, S. *Torsion points on elliptic curves and q-coefficients*, Inventiones mathematicae, Vol. 109, 1992, 221-229.

[4] KENKU, M.; MOMOSE, F. *Torsion groups on elliptic curves defined over quadratic fields*, Nagoya Mathematical Journal, Vol. 109, 1988, 125-149.

[5] DERICKX, M.; ETROPOLSKI, A.; HOEIJ, M.; MORROW, J.; ZUREICK-BROWN, D. *Sporadic cubic torsion*, arXiv:2007.13929v1, 2020, 1-24.

[6] PARENT, P. *Torsion des courbes elliptiques sur les corps cubiques*, Annales de l'Institut Fourier, Vol. 50, N. 3, 2000, 723-749.

[7] BOKUN, M. *Elliptic curves over quadratic fields with fixed torsion subgroup and positive rank*, Glasnik matematicki, Vol. 47, 2012, 277-284.

[8] KAMIENNY, S.; NAJMAN, F. *Torsion points of elliptic curves over quadratic fields*, arXiv:1103.5906, 2016, 1-20.

[9] GONZALEZ, E.; TORNERO, J. *Torsion of rational elliptic curves over quadratic fields I*, RACSAM, Vol. 108, 2014, 923-934.

[10] GONZALEZ, E.; J. TORNERO, *Torsion of rational elliptic curves over quadratic fields II*, RACSAM, Vol. 110, 2016, 121-143.

[11] KAGAWA, T. *Torsion groups of elliptic curves with everywhere good reduction over quadratic fields*, International journal of algebra, Vol. 10, N. 10, 2016, 461-467.

[12] NAJMAN, F. *Torsion of rational elliptic curves over cubic fields and sporadic points on* $X_1(n)$, Mathematical Research Letters, Vol. 32, 2016, 245-272.

[13] DERICKS, M.; NAJMAN, F. *Torsion of elliptic curves over cyclic cubic fields*, Mathematics of Computation, Vol. 88, 2018, 2443-2459.

[14] JEON, D.; KIM, C.; SCHWEIZER, A. *Bielliptic intermediate modular curve*, Journal of pure and applied algebra, Vol. 224, 2020, 272-229.

[15] KUBERT, D.; LANG, S. *Modular units*, Springer-Verlag, New York, 1981, 360.

[16] STEVENS, G. *Arithmetic on modular curves*, Birkhauser-Boston, Basel, Stuttgart, 1982, 217.

[17] KAMIENNY, S. *On* $J_1(p)$ *and the conjecture of Brich and Swinnerton-Dyer*, Duke mathematical journal, Vol. 49, N. 2, 1982, 329-340.

[18] ROTMAN, J. *An Introduction to Homological Algebra*, Springer-Verlag, New York, 2009, 710.

[19] OORT, F.; TATE, J. *Group scheme of prime order*, Annales scientifiques de L.E.N.S., Vol. 4, 1970, 1-21.

[20] HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, 496.

[21] TAMME, G. *Introduction to Étale Cohomology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994, 186.