

دراسة التصادم الرأسي والإنزياحات الطورية للأموج الصوتية السوليتونية في بلازما مغبرة مع أيونات فائقة الحرارة

د. نجاح قبلان*

د. محمود أحمد**

علي أسد***

(تاريخ الإيداع 12 / 3 / 2020. قُبل للنشر في 24 / 1 / 2021)

□ ملخص □

تم في هذا العمل دراسة تأثير بارامتر الحرارة الفائقة للأيونات على قوة الاستقطاب الناتجة عن تشوه غمد ديباي المتشكل حول حبيبة الغبار في بلازما مغبرة مكونة من إلكترونات خاضعة لتوزيع مكسويل بولتزمان وأيونات فائقة الحرارة خاضعة لتوزيع كايا وحبيبات غبار مشحونة بشحنة سالبة.

تم استخدام طريقة (بونكاريه - ليثل - كو) (PLK) بهدف اختزال جملة معادلات المائع الغباري بمعادلتَي كورديفيك دي فريس (KdV) التي لها حلول سوليتونية يمثل كل حل من هذين الحلين أحد السوليتونات المتصادمة. تبين أن بارامتر الحرارة الفائقة يلعب دوراً هاماً في استقطاب حبيبة الغبار على اعتبار أن الأيونات هي المشكلة لغمد ديباي حول الحبيبة. كما تبين أن هذه التغيرات في قوة الاستقطاب تؤثر بشكل واضح على سعة وعرض الأمواج السوليتونية المتصادمة وعلى الانزياحات الطورية الناتجة عن التصادم.

الكلمات المفتاحية: بلازما مغبرة - قوة الاستقطاب - طريقة (بونكاريه - ليثل - كو) - معادلة كورديفيك دي فريس.

* أستاذ - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

** أستاذ - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

*** طالب دراسات عليا (دكتوراه) - اختصاص فيزياء نظرية - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

Study of Head on Collision and Phase Shifts of Acoustic Solitary Waves in Dusty Plasma with Superthermal Ions

Dr. Najah Kabalan *
Dr. Mhmoud Ahmad **
Ali Asad ***

(Received 12 / 3 / 2020. Accepted 24 / 1 / 2021)

□ ABSTRACT □

In this research, The effect of superthermal of ions was studied on in polarization force Attributable of deformation of the Debye sheath around the dust grains in dusty plasma with Boltzmann distributed electrons and kappa distributed superthermal ions, and negatively charged dust grains.

Two opposite directional Kortewg-de-vries (KdV) equations are derived and the phase shift due to collision is obtained using the extended version of Poincare'-Lighthill-Kuo method. It is found that superthermal parameter have been shown to be play a significant role on polarization of dust grain that the ions are the constituent of the sheath formed around the grain. These changes in polarization force effect on amplitude, width of colliding solitary waves, In addition to the phase shifts resulting from the collision.

Keywords: dusty plasma, polarization force, Poincare'-Lighthill-Kuo method, Kortewg-de-vries (KdV) equation.

* Professor, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

** Professor, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

*** Postgraduate Student (Phd), Theoretical Physics, Department of Physics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

ازداد الاهتمام بدراسة الظواهر اللاخطية في البلازما المغبرة بسبب وجود الغبار في مختلف البيئات الفضائية والفلكية، كالحلقات الكوكبية والمذنبات والغلاف الأيوني للأرض والسحب الجزيئية بين النجوم [1-3]. تم التركيز في أواخر القرن الماضي على دراسة البلازما المغبرة مخبرياً نظراً للتطبيقات التكنولوجية العديدة في مجال الصناعة، حيث تم العثور على حبيبات الغبار خلال عمليات تصنيع الرقائق الإلكترونية باستخدام النقش البلازمي، والتي فتحت الباب أمام أبحاث جديدة تربط بين حقول فيزياء البلازما والمادة المكثفة وعلم البلورات من خلال إمكانية تبلور الحبيبات (التي تكون درجة حرارتها منخفضة بالنسبة لدرجة حرارة المكونات الأخرى) في بنية بلورية تسمى بلورة البلازما أو بلورة كولون التي تتشكل عندما تتجاوز قيمة بارامتر الاقتران، الذي يمثل النسبة بين طاقة التفاعل بين الحبيبات والطاقة الحرارية لهذه الحبيبات، قيمة حدية ($\Gamma_c \approx 170$) عندها تسيطر خاصية المرونة على الوسط البلازمي المغبر وتتشكل البلورة [4,5].

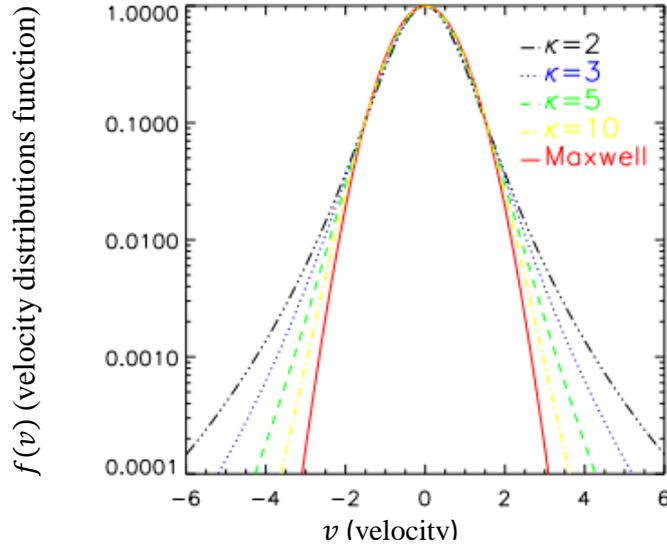
تتألف البلازما المغبرة من غاز متأين يحتوي على حبيبات غبار مشحونة تتراوح أحجامها بين عشرات النانومتر ومئات الميكرونات، بحيث يؤدي التفاعل بين حبيبات الغبار ومكونات البلازما الأخرى (إلكترونات - أيونات) إلى شحن حبيبات الغبار.

تحتوي بعض الجمل البلازمية كالبلازما الفضائية على عدد كبير من الجسيمات عالية السرعة، ويصبح تابع توزع مكسويل بولتزمان غير مناسب لوصف هذه الجمل. تسمى العلاقة الرياضية المستخدمة في وصف البلازما الفضائية (توزع كبا)، حيث يتم وصف هذه البلازما بشكل أفضل من خلال الصيغة العامة لتوزع كبا بدلاً من توزع ماكسويل، ويمكن التعبير عن الجسيمات ذات السرعة العالية بشكل جيد عندما يكون لتوزع كبا بعض القيم الصغيرة المحددة [6]، كلما كانت قيمة بارامتر كبا أكبر، كلما كانت البلازما أقرب إلى حالة التوازن الترموديناميكي، وعندما تنتهي قيمة هذا البارامتر إلى اللانهاية تصبح البلازما في حالة توازن ترموديناميكي تام، وتخضع البلازما الفضائية في هذه الحالة لتوزع ماكسويل.

ويعد بارامتر كبا خاصية حرارية جديدة (إضافة للخواص الأخرى كدرجة الحرارة والكثافة والضغط) والتي يمكن أن تخبرنا عن المسافة الترموديناميكية، التي تعبر عن مقدار ابتعاد الجملة عن حالة التوازن الترموديناميكي. يعرف تابع توزع كبا بالعلاقة الآتية [6]:

$$f_i^k(r, v) = \frac{n_i}{2\pi(kw_{ki}^2)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \Gamma(k+1) \left(1 + \frac{v^2}{kw_{ki}^2}\right)^{-(k+1)} \quad (1)$$

حيث: $w_{ki} = \sqrt{(2k-3)K_B T_i / km_i}$ السرعة الأكثر احتمالاً و m_i كتلة الجسيمات و n_i الكثافة العددية، T_i درجة الحرارة المكافئة، K_B ثابت بولتزمان و v سرعة الجسيمات و Γ تابع غاما. هنا يجب أن يأخذ بارامتر كبا قيمة كبيرة $k > \frac{3}{2}$ للإبتعاد عن قيمة حرجة قدرها $k_c = \frac{3}{2}$. حيث ينهار تابع التوزع (1) وتصبح درجة الحرارة المكافئة غير محددة. وتشير قيمة k إلى انخفاض طيف الطاقة للجسيمات فانقة الحرارة المشكلة لنيل توابع توزع السرعة [velocity distributions functions (VDFs)] كما هو موضح في الشكل (1). يتحول تابع توزع كبا (في الحالة عندما $k \rightarrow \infty$) إلى تابع توزع مكسويل بولتزمان.



الشكل (1): تابع توزيع كبا للسرعة من أجل قيم مختلفة للبارامتر كبا [6]

تساهم حبيبات الغبار الموجودة في البلازما في إثارة أنماط اهتزاز جماعية جديدة في البلازما المغبرة. [كالأموج الصوتية الغبارية ((DA) Dust-acoustic) ، الأمواج الصوتية الأيونية الغبارية ((DIA) Dust-ion-acoustic) والبنى المترابطة اللاخطية [الأمواج السوليتونية الصوتية الغبارية ((DAS) Dust-acoustic solitary) ، الأمواج السوليتونية الصوتية الأيونية الغبارية ((DAIS) Dust-ion-acoustic solitary) في البلازما المغبرة. تنتج هذه الأنماط عند اضطراب البلازما لحظياً عن حالة التوازن نتيجة تعرضها لمؤثرات خارجية كالضغط أو حقول كهربائية و مغناطيسية، بسبب هذا الاضطراب إزاحة حبيبات الغبار المشحونة عن وضع توازنها فينتج عن هذه الإزاحة حقل كهربائي يؤثر على حبيبات الغبار بقوة كهربائية تسبب إعادتها إلى وضع توازنها وينتج عن ذلك حركة اهتزازية للحبيبات حول وضع توازنها بتواتر يسمى التواتر البلازمي الغباري أو التواتر السيلكتروني الغباري عند تعرض البلازما لحقل مغناطيسي خارجي. يكون التواتر البلازمي الغباري أصغر من التواتر البلازمي للإلكترونات والأيونات بسبب الكتلة الكبيرة لحبيبات الغبار مقارنة بكتلة الإلكترونات والأيونات.

تخضع حبيبات الغبار في البلازما المغبرة للعديد من القوى الطبيعية، كالقوة الكهربائية، وقوة السحب الأيونية (ion drag force) وقوة التدرج الحراري (thermophoretical force) وقوة الجاذبية [7,8] إلخ. وتعد القوة الكهربائية أكثرها تأثيراً بسبب الشحنة الكبيرة التي يحملها سطح حبيبة الغبار.

قام كل من هاماغوشي وفاروقي (Hamaguchi and Farouki) بنشر ورقتين تناولوا فيهما مفهوم قوة الاستقطاب وتأثيرها على البلازما المغبرة غير المنتظمة (nonuniform) [9,10]، والتي تنشأ عن تشوه شكل غمد ديبي (Debye sheath) المتشكل حول حبيبات الغبار.

يعرف غمد ديبي بأنه المسافة التي يؤثر من خلالها الحقل الكهربائي لحبيبة الغبار المشحونة على مكونات البلازما الأخرى، وتقاس هذه المسافة بطول مميز يسمى طول ديبي الغباري (dust Debye length). يعبر عن قوة الاستقطاب بدلالة طول ديبي الغباري بالشكل الآتي [11]:

$$\vec{F}_p = -\frac{q_d^2 \vec{\nabla} \lambda_D}{8\pi \varepsilon_0 \lambda_D^2} \quad (2)$$

حيث:

$$\lambda_D = \frac{\lambda_{Di}}{\sqrt{1 + \frac{n_e T_i}{n_i T_e}}}, \quad \lambda_{Di} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 K_B T_i}{e^2 n_i \sigma_k}}, \quad \text{في حالة خاصة } n_e T_i \ll n_i T_e$$

$$\lambda_D \approx \lambda_{Di} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 K_B T_i}{e^2 n_i \sigma_k}}$$

قام العديد من الباحثين بدراسة خصائص أمواج السوليتون المغنيتوصوتية في جمل بلازمية مختلفة، وذلك بدراسة تشكل وانتشار هذه الأمواج في بلازما كوانتية فانقة الكثافة مكونة من أيونات والكترونات، وبوزيترونات باستخدام طريقة الاضطراب المختزلة للحصول على معادلة كورديفيك دي فريس [Korteweg – de Vries (KdV)] التي لها حلول سوليتونية وتبين من خلال البحث أن لكتلة الالكترون والبوزيترون تأثير واضح على سعة وعرض هذه الأمواج [12] إضافة لذلك تناولت العديد من الأبحاث خصائص الأمواج السوليتونية الصوتية الغبارية بما فيها تصادم هذه الأمواج مع بعضها في البلازما المغبرة.

درس غوش وزملائه (Ghosh et al) سنة 2011 التصادم الرأسي بين الأمواج السوليتونية الصوتية الغبارية في بلازما مغبرة غير ممغنطة مكونة من أربع مكونات؛ إلكترونات خاضعة لتوزيع بولتزمان وأيونات غير حرارية (nonthermal) ونوعين من حبيبات الغبار المشحونة بشحنة سالبة وموجبة [13]. استخدموا طريقة بوناكريه - ليثل - كو [Poincaré-Lighthill-Kuo (PLK)]، وهي طريقة اضطرابية اختزالية تطبق على معادلات المائع الغباري بهدف الحصول على معادلات تفاضلية جزئية لاخطية لها حلول سوليتونية، وتمتاز عن الطرق الاضطرابية الأخرى كطريقة الاضطراب المختزلة بأنه يمكن من خلال هذه الطريقة الحصول على معادلتين بدلاً من معادلة واحدة حيث يمثل حل كل معادلة أحد السوليتونات المتصادمة، وتوصلوا من خلال دراستهم هذه إلى أن الأيونات غير الحرارية تلعب دوراً مهماً في تصادم الأمواج السوليتونية الصوتية الغبارية، وذلك من خلال تأثيرها على الانزياحات الطورية الناتجة عن التصادم. درس جايسوال وزملائه (Jaiswal et al) سنة 2016 التصادم الرأسي بين الأمواج السوليتونية الصوتية الغبارية في بلازما مغبرة مرتبطة بقوة. وتوصلوا من خلال هذه الدراسة إلى وجود تغير كبير في انزياح الطور في جمل البلازما شديدة الاقتران مقارنة بالبلازما ضعيفة الاقتران [14].

درس كل من Kuldeep Singh et al التصادم الرأسي بين عدة سوليتونات صوتية غبارية في بلازما مغبرة غير متوازنة حرارياً تخضع فيها الأيونات للتوزيع غير الحراري (nontherma). وتبين من خلال دراستهم أن بارامتر الاستقطاب يزداد بازدياد البارامتر غير الحراري. استخدمت في الدراسة طريقة بوناكريه - ليثل - كو (PLK) بهدف الحصول على معادلات كورديفيك - دي فريس (KdV) وطريقة هيروتا بهدف الحصول على حل عدة سوليتونات لكل معادلة (KdV) [15].

درس Ju-Kui Xue التصادم الرأسي بين الأمواج السوليتونية الصوتية الغبارية في بلازما مغبرة غير ممغنطة مكونة من حبيبات غبار ذات شحنة متغيرة. استخدموا في دراستهم طريقة (PLK). وتوصلوا من خلال دراستهم إلى أن الانزياحات الطورية الناتجة عن التصادم تزداد بازدياد نسبة الكثافة العددية للأيونات إلى الكثافة العددية للإلكترونات، وتتأثر بشكل كبير بشحنة الغبار المتغيرة [16].

تم في هذه الدراسة استخدام طريقة (PLK) المتبعة في المرجع [16] على اعتبار أن هذه الطريقة تمكننا من الحصول على معادلاتي KdV ودراسة التصادم الرأسي بين الأمواج السوليتونية. يكمن الاختلاف بين الدراستين في خصائص الوسط البلازمي المدروس والقوى المؤثرة على هذا الوسط، حيث تم دراسة تأثير قوة الاستقطاب المؤثرة على الغمد البلازمي حول حبيبة الغبار، وأخذنا بالحسبان أن الغمد البلازمي مكون من أيونات فائقة الحرارة تخضع لتوزيع كبا وهذا سيؤثر بشكل واضح على قوة الاستقطاب وبالتالي على سلوك الأمواج السوليتونية المتصادمة في الوسط.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث في دراسة تأثير قوة الاستقطاب على الأمواج السوليتونية الصوتية الغبارية المتصادمة رأسياً انطلاقاً من معادلات نموذج المائع البلازمي الغباري باستخدام طريقة بونكاريه - ليتل - كو (PLK) بهدف اختزال جملة معادلات المائع الغباري بمعادلاتي كورديفيك دي فريس التي لها حلول سوليتونية تمثل الأمواج السوليتونية المتصادمة، وذلك بهدف دراسة ومعرفة:

- تأثير توزيع كبا على قيمة بارامتر الاستقطاب.
- تأثير بارامتر الاستقطاب على معاملات اللاخطية والتبدد وعلى شكل السوليتون.
- تأثير بارامتر الاستقطاب على الإنزياحات الطورية الناتجة عن التصادم.

طرائق البحث ومواده:

تناولنا خلال هذا البحث جملة بلازمية مغبرة مكونة من إلكترونات وأيونات وحبيبات غبار مشحونة بشحنة سالبة محاطة بغمد ديباي من الأيونات موجبة الشحنة ودراسة تأثيرات الفائقية الحرارية (superthermality) على قوة الاستقطاب نفترض أن الأيونات خاضعة لتابع توزيع مكسويل بولتزمان المعدل [تابع توزيع كبا(Kappa)]. تعطي كثافة الأيونات وفق تابع التوزيع هذا بالعلاقة [15-16]:

$$n_i = n_{i0} \left(1 + \frac{e\Phi}{K_B T_i}\right)^{-k+1/2} \quad (3)$$

بينما تخضع الإلكترونات لتابع توزيع بولتزمان، بحيث يعبر عن كثافة الإلكترونات بالعلاقة:

$$n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e\Phi}{K_B T_e}\right) \quad (4)$$

بتعويض (3) في (2) تأخذ قوة الاستقطاب الشكل الآتي:

$$\vec{F}_p = -\frac{q_d^2 e}{16\pi\epsilon_0\lambda_D K_B T_i} \frac{1}{\left(1 + \frac{n_e T_i}{n_i T_e}\right)} \times \left[\sigma_k - \frac{T_i^2 n_{e0}}{T_e^2 n_{i0}}\right] \vec{\nabla}\Phi \quad (5)$$

حيث:

$$\sigma_k = \frac{k - 1/2}{k - 3/2}$$

نلاحظ من المعادلة (5) في الحالة ($k \rightarrow \infty$) فإن $\vec{F}_p \rightarrow -\frac{q_d^2 e}{16\pi\epsilon_0 \lambda_D K_B T_i} \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) \vec{\nabla} \Phi$ وهي تمثل قوة الاستقطاب في الحالة الموافقة لخضوع الأيونات لتوزيع بولتزمان [17].

يمكن دراسة الأموح السوليتونية الصوتية الغبارية باستخدام معادلات المائع الغباري، التي تتكون من معادلة الاستمرارية ومعادلة الحركة ومعادلة بواسون. هذا وتعطى معادلة الاستمرارية لحبيبات غبار الوسط المدروس بالشكل الآتي:

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial(n_d \vartheta_d)}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

حيث: n_d كثافة حبيبات الغبار، ϑ_d سرعة المائع الغباري، كما يعبر عن معادلة الحركة بالشكل الآتي:

$$\frac{\partial \vartheta_d}{\partial t} + \vartheta_d \frac{\partial \vartheta_d}{\partial x} = \frac{Z_d}{m_d} \chi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (7)$$

حيث: Φ الكمون الكهربائي الساكن و $\chi = 1 - R$ حيث R بارامتر الاستقطاب ويمثل تأثيرات تفاعل استقطاب بلازما - جسيم على حبيبات الغبار ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$R = \frac{|q_d|e}{16\pi\epsilon_0 \lambda_D K_B T_i} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \left(\sigma_k - \frac{T_i^2}{T_e^2}\right) \quad (8)$$

وتختم المعادلات بمعادلة بواسون:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = e(n_e + Z_d n_d - n_i) \quad (9)$$

حيث: n_i كثافة الأيونات، n_e كثافة الإلكترونات. نجري مجموعة من التحويلات للمقادير الفيزيائية في المعادلات (3, 4, 6, 7, 9)، بحيث تصبح بدون أبعاد، وذلك بأخذ نسبة المقدار الفيزيائي المراد تنظيمه إلى مقدار فيزيائي آخر له الأبعاد نفسها. وبالتالي يمكن تنظيم المقادير الفيزيائية كالكثافة والسرعة والموضع والزمن والكمون الكهربائي الساكن كالآتي [15-16]:

$$n_d \rightarrow \frac{n_d}{n_{d0}}, \quad \vartheta_d \rightarrow \frac{\vartheta_d}{C_d}, \quad x \rightarrow \frac{x}{\lambda_{Dd}}, \quad t \rightarrow t\omega_{pd}, \quad \Phi \rightarrow \frac{e\Phi}{K_B T_i}$$

حيث: $C_d = \left(\frac{Z_d K_B T_i}{m_d}\right)^{1/2}$ سرعة الصوت الغبارية، $\lambda_{Dd} = \left(\frac{K_B T_i}{n_{d0} Z_d e^2}\right)^{1/2}$ طول ديبياي الغباري، $\omega_{pd} = \left(\frac{n_{d0} Z_d^2 e^2}{m_d}\right)^{1/2}$ التواتر البلازمي الغباري، توصلنا من خلال هذا الإجراء إلى جملة من المعادلات المنسجمة ذاتياً والمعبر عنها تبعاً وفق الآتي:

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial(n_d \vartheta_d)}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \vartheta_d}{\partial t} + \vartheta_d \frac{\partial \vartheta_d}{\partial x} = \chi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \mu_e \exp(\sigma_i \Phi) + n_d - \mu_i \left(1 + \frac{\Phi}{3}\right)^{-k+1/2} \quad (12)$$

حيث: $\sigma_i = T_i/T_e$ نسبة درجة الحرارة الأيونية إلى درجة الحرارة الإلكترونية، $\mu_i = n_{i0}/Z_d n_{d0}$ ، $\mu_e = n_{e0}/Z_d n_{d0}$

و $\mu_i = \mu_e + 1$ نحصل عليها من حالة شبه الاعتدال $n_{i0} = n_{e0} + Z_d n_{d0}$

طريقة بونكاريه - ليثيل - كو (PLK) و معادلات (KdV):

سنعمل من خلال هذا البحث على دراسة تغير الانزياحات الطورية (phase shifts) لموجتين سوليتونيتين صوتيتين غباريتين (DASWs) تتحركان باتجاهين متعاكسين وتتصادمان مع بعضهما البعض باستخدام طريقة (PLK)

الاضطرابية لدراسة تأثيرات التصادم [18]. نستبدل المتحولين المستقلين (x) و (t) بمتحولات تابعة تضمن الانتقال إلى إطارين مرجعيين الأول يتحرك بسرعة c_1 بالنسبة لإطار ثابت والثاني يتحرك بسرعة c_2 بالنسبة لإطار ثابت والمعبر عنها كالآتي [16]:

$$\begin{aligned}\xi &= \varepsilon(x - c_1 t) + \varepsilon^2 P_0(\eta, \tau) + \varepsilon^3 P_1(\eta, \tau) + \dots \\ \eta &= \varepsilon(x + c_2 t) + \varepsilon^2 Q_0(\xi, \tau) + \varepsilon^3 Q_1(\xi, \tau) + \dots \\ \tau &= \varepsilon^3 t\end{aligned}\quad (13)$$

حيث ε بارامتر عديم أبعاد قيمته أصغر من الواحد $0 < \varepsilon \ll 1$ يمثل مقدار سعة الموجة (قوة اللاخطية) بحيث يمكن إهمال الحدود الاضطرابية من المراتب العليا، $P_0(\eta, \tau)$ و $P_1(\eta, \tau)$ و $Q_0(\xi, \tau)$ و $Q_1(\xi, \tau)$ هي كميات كيفية يتم تحديدها لاحقاً خلال الحل بطريقة (PLK)، تسمح لنا هذه التتابع بحساب الانزياحات الطورية الناتجة عن التصادم. يرتبط الانزياح الطوري للموجة السوليتونية بمسار الموجة الثانية التي تصطم بها، بمعنى آخر تختلف الانزياحات الطورية باختلاف نوع التصادم، فيوجد ثلاث أنواع من التصادمات التصادم الرأسي المدروس في هذا البحث (head on collision) ينتج عند يتحرك السوليتونين باتجاهين متعاكسين، وتصادم التجاوز (overtake collision) ينتج عندما يتحرك السوليتونين بنفس الاتجاه، والتصادم المائل (Oblique Collision) ينتج عندما تصنع مسارات السوليتونات زاوية حادة أو منفرجه. يمكن تمثيل مسارات DASWs المتصادمة من خلال المتغيرين ξ و η ، كما يمكن تحديد الكميات $P_0(\eta, \tau)$ و $Q_0(\eta, \tau)$ وسرعتي طور الموجتين السوليتونين c_1 و c_2 لاحقاً.

إن تعرض الوسط البلازمي لتأثيرات خارجية ينتج عنه اضطراب في الكميات الفيزيائية المميزة للوسط مما يؤدي إلى تغيرات في قيمها، ولمعرفة هذه التغيرات يتم إدخال حدود تصحيحية من مراتب مختلفة شريطة أن تكون أصغر من الواحد، وذلك بضرب المقدار الفيزيائي المعني بالبارامتر ε كمعامل ضرب من مراتب مختلفة. في المرحلة الثانية لطريقة (PLK) قمنا بنشر الكميات الفيزيائية (الكثافة، السرعة، الكون الكهربائي) في سلسلة قوى كالآتي [16]:

$$\begin{aligned}n_d &= 1 + \varepsilon^2 n_{d1} + \varepsilon^3 n_{d2} + \varepsilon^4 n_{d3} + \dots \\ \vartheta_d &= \vartheta_0 + \varepsilon^2 \vartheta_1 + \varepsilon^3 \vartheta_2 + \varepsilon^4 \vartheta_3 + \dots \\ \Phi &= \varepsilon^2 \Phi_1 + \varepsilon^3 \Phi_2 + \varepsilon^4 \Phi_3 + \dots\end{aligned}\quad (14)$$

بتعويض (13) و (14) في جملة المعادلات (12) - (10) ومساواة أمثال ε^2 نحصل على المعادلات الآتية:

$$\Phi_1 = \Phi_\xi(\xi, \tau) + \Phi_\eta(\eta, \tau) \quad (15)$$

$$n_1 = - \left[\mu_i \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)}{\left(k - \frac{3}{2}\right)} + \mu_e \sigma_i \right] [\Phi_\xi(\xi, \tau) + \Phi_\eta(\eta, \tau)] \quad (16)$$

$$\vartheta_1 = - \frac{\chi}{(c_1 - \vartheta_0)} \vartheta_\xi + \frac{\chi}{(\vartheta_0 + c_2)} \vartheta_\eta \quad (17)$$

بحل جملة المعادلات (17) - (15) نحصل على سرعة طور الموجة السوليتونية الصوتية الغبارية الأولى:

$$c_1 = \left[\frac{\chi \left(k - \frac{3}{2}\right)}{\mu_e \sigma_i \left(k - \frac{3}{2}\right) + \mu_i \left(k - \frac{1}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} + \vartheta_0 \quad (18)$$

وسرعة طور الموجة السوليتونية الصوتية الغبارية الثانية:

$$c_2 = \left[\frac{\chi \left(k - \frac{3}{2} \right)}{\mu_e \sigma_i \left(k - \frac{3}{2} \right) + \mu_i \left(k - \frac{1}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} - \vartheta_0 \quad (19)$$

كما نحصل بمساواة أمثال ε^3 بالصفر على المعادلات الآتية:

$$\Phi_2 = \Phi_\xi(\xi, \tau) + \Phi_\eta(\eta, \tau) \quad (20)$$

$$n_2 = - \left[\mu_i \frac{\left(k - \frac{1}{2} \right)}{\left(k - \frac{3}{2} \right)} + \mu_e \sigma_i \right] [\Phi_\xi(\xi, \tau) + \Phi_\eta(\eta, \tau)] \quad (21)$$

$$\vartheta_2 = - \frac{\chi}{(c_1 - \vartheta_0)} \varphi_\xi + \frac{\chi}{(\vartheta_0 + c_2)} \varphi_\eta \quad (22)$$

وبمساواة أمثال ε^4 و ε^5 ، وبالاستفادة من المعادلات (22) - (15) نحصل على المعادلة الآتية:

$$\begin{aligned} & 2 \left[\frac{\chi \left(k - \frac{3}{2} \right)}{\mu_e \sigma_i \left(k - \frac{3}{2} \right) + \mu_i \left(k - \frac{1}{2} \right)} \right] \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial \xi \partial \eta} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \tau} + A \Phi_\xi \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \Phi_\xi}{\partial \xi^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \tau} - A \Phi_\eta \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} - B \frac{\partial^3 \Phi_\eta}{\partial \eta^3} \right) \\ &+ \left(C \frac{\partial P_0}{\partial \eta} + D \Phi_\eta \right) \frac{\partial^2 \Phi_\xi}{\partial \xi^2} \\ &- \left(C \frac{\partial Q_0}{\partial \xi} + D \Phi_\xi \right) \frac{\partial^2 \Phi_\eta}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (23)$$

حيث:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{E} \left\{ - \left[\frac{\mu_e \sigma_i \left(k - \frac{3}{2} \right) + \mu_i \left(k - \frac{1}{2} \right)}{\chi \left(k - \frac{3}{2} \right)} \right]^2 (2\chi + 1) + 2 \left[\mu_i \frac{\left(k - \frac{1}{2} \right)^2}{\left(k - \frac{3}{2} \right)} - \mu_e \frac{\sigma_i^2}{2} \right] \right\} \\ B &= \frac{1}{E} \\ C &= \frac{1}{2} \left[\frac{\chi \left(k - \frac{3}{2} \right)}{\mu_e \sigma_i \left(k - \frac{3}{2} \right) + \mu_i \left(k - \frac{1}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} [1 + \chi] \\ D &= \frac{1}{E} \left[\left[\frac{\mu_e \sigma_i \left(k - \frac{3}{2} \right) + \mu_i \left(k - \frac{1}{2} \right)}{\chi \left(k - \frac{3}{2} \right)} \right]^2 + 2 \left[\mu_i \frac{\left(k - \frac{1}{2} \right)^2}{\left(k - \frac{3}{2} \right)} - \mu_e \frac{\sigma_i^2}{2} \right] \right] \\ E &= 2 \left[\frac{\mu_e \sigma_i \left(k - \frac{3}{2} \right) + \mu_i \left(k - \frac{1}{2} \right)}{\chi \left(k - \frac{3}{2} \right)} \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

تعطى السرعة ϑ_3 بدلالة كل من Φ_ξ (المستقلة عن η) و Φ_η (المستقلة عن ξ) بالعلاقة [16]:

$$\vartheta_3 = - \frac{\chi}{(c_1 - \vartheta_0)} \varphi_\xi + \frac{\chi}{(\vartheta_0 + c_2)} \varphi_\eta$$

وبالتالي فإن $\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ ويصبح الطرف الأيسر من المعادلة (23) مساوياً للصفر. يمثل الحد الأول من الطرف الأيمن معادلة كورديفيك دي فريس الأولى، لذلك يمكن مساواة هذا الحد بالصفر ويكتب بالصيغة الآتية:

$$\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \tau} + A \Phi_\xi \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \Phi_\xi}{\partial \xi^3} = 0 \quad (25)$$

يعطى حل هذه المعادلة بالشكل الآتي [20]:

$$\Phi_\xi = \Phi_1 \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{A \Phi_1}{12B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\xi - \frac{1}{3} A \Phi_1 \tau \right) \right] \quad (26)$$

حيث: $\Phi_1 = \frac{3u_0}{A}$ ، $W_1 = \sqrt{\frac{4B}{u_0}}$ سعة وعرض الموجة الأولى على الترتيب و u_0 سرعة الموجة الأولى. يمثل هذا الحل السوليتون الأول الذي يتحدد مساره بالمتغير ξ . يعبر الحد الثاني من الطرف الأيمن من المعادلة (23) عن معادلة كورديفيك دي فريس الثانية، لذلك يمكن مساواته بالصفر ويكتب بالصيغة الآتية:

$$\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \tau} - A \Phi_\eta \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} - B \frac{\partial^3 \Phi_\eta}{\partial \eta^3} = 0 \quad (27)$$

يعطى حل هذه المعادلة بالشكل الآتي:

$$\Phi_\eta = \Phi_2 \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{A \Phi_2}{12B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\eta + \frac{1}{3} A \Phi_2 \tau \right) \right] \quad (28)$$

حيث $\Phi_2 = \frac{3U_0}{A}$ ، $W_2 = \sqrt{\frac{4B}{U_0}}$ سعة وعرض الموجة الثانية على الترتيب و U_0 سرعة الموجة الثانية. يمثل حل هذه المعادلة السوليتون الثاني الذي يتحدد مساره بالمتغير η .

نلاحظ أن للمعادلتين (25) و (27) نفس معاملات اللاخطية A (nonlinear) والتبدد B (dispersion). بالعودة إلى العلاقة (15) نستنتج أن $\frac{\partial^2 \Phi_\xi}{\partial \xi^2} \neq 0$ و $\frac{\partial^2 \Phi_\eta}{\partial \eta^2} \neq 0$ ، وبالتالي فإن أمثال كلٍ منهما في الطرف الأيمن من المعادلة (23) يكون معدوماً أي أن [16,19]:

$$C \frac{\partial P_0}{\partial \eta} = -D \Phi_\eta \quad (29)$$

$$C \frac{\partial Q_0}{\partial \xi} = -D \Phi_\xi \quad (30)$$

تحسب الانزياحات الطورية الناتجة عن التصادم من المعادلتين (29) و (30) وفق الشكل الآتي [18]:

$$P_0(\eta, \tau) = -\frac{D}{C} \left(\frac{12B \Phi_2}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \tanh \left[\left(\frac{A \Phi_2}{12B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\eta + \frac{1}{3} A \Phi_2 \tau \right) \right] + 1 \right\} \quad (31)$$

$$Q_0(\xi, \tau) = -\frac{D}{C} \left(\frac{12B \Phi_1}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \tanh \left[\left(\frac{A \Phi_1}{12B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\xi - \frac{1}{3} A \Phi_1 \tau \right) \right] - 1 \right\} \quad (32)$$

بتعويض (31) و (32) في (13) نحصل على مسارات الأمواج السوليتونية المتصادمة:

$$\xi = \varepsilon(x - c_1 t) - \varepsilon^2 \frac{D}{C} \left(\frac{12B\Phi_2}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \tanh \left[\left(\frac{A\Phi_2}{12B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\eta + \frac{1}{3} A\Phi_2 \tau \right) \right] + 1 \right\} + O(\varepsilon^3) \quad (33)$$

$$\eta = \varepsilon(x + c_2 t) - \varepsilon^2 \frac{D}{C} \left(\frac{12B\Phi_1}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \tanh \left[\left(\frac{A\Phi_1}{12B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\xi - \frac{1}{3} A\Phi_1 \tau \right) \right] - 1 \right\} + O(\varepsilon^3) \quad (34)$$

للحصول على الانزياحات الطورية الناتجة عن تصادم السوليتونين، نفرض أن السوليتونين (1) و (2) بعيدين عن بعضهما في اللحظة الابتدائية، حيث يتواجد السوليتون (1) في $(\xi = 0, \eta = -\infty)$ والسوليتون (2) في $(\eta = 0, \xi = +\infty)$. بعد التصادم يبتعد السوليتونين عن بعضهما من جديد، هذا يعني السوليتون (1) في $(\xi = 0, \eta = +\infty)$ والسوليتون (2) في $(\eta = 0, \xi = -\infty)$. باستخدام المعادلات (33) و (34) نحصل على الانزياحات الطورية ΔP_0 و ΔQ_0 كالآتي:

$$\Delta P_0 = \varepsilon(x - c_1 t)|_{\xi=0, \eta=+\infty} - \varepsilon(x - c_1 t)|_{\xi=0, \eta=-\infty}$$

$$\Delta Q_0 = \varepsilon(x + c_2 t)|_{\eta=0, \xi=-\infty} - \varepsilon(x + c_2 t)|_{\eta=0, \xi=+\infty}$$

وبالتالي تعطى الانزياحات الطورية للسوليتونين (1) و (2) وفق الصيغة الآتية:

$$\Delta P_0 = 2\varepsilon^2 \frac{D}{C} \left(\frac{12B\Phi_2}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

$$\Delta Q_0 = -2\varepsilon^2 \frac{D}{C} \left(\frac{12B\Phi_1}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

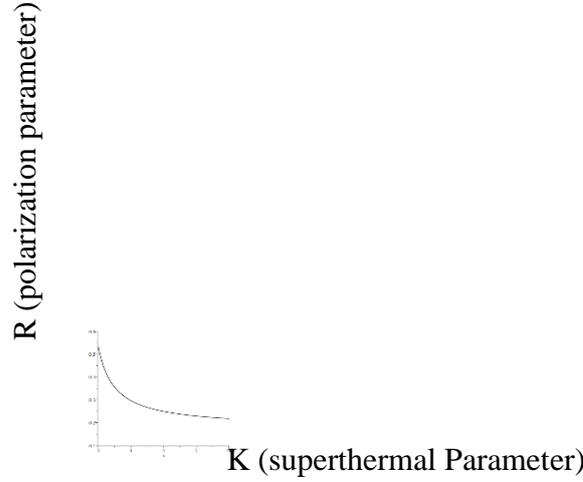
بما أن الموجة السوليتونية (1) تنتقل لليمين والموجة السوليتونية (2) تنتقل لليسار نستطيع الملاحظة من المعادلتين (35) و (36) أن نتيجة اصطدام كل موجة سوليتونية تملك انزياح طور موجب في اتجاه انتقال الموجة.

النتائج والمناقشة:

استخدمنا في هذه الدراسة برنامج ميبل (Maple) لرسم العلاقات الرياضية التي تم الحصول عليها من أجل بارامترات البلازما (σ_i, μ_i, μ_e) ، بالإضافة إلى بارامتر الحرارة الفانقة k للأيونات.

تم الحصول على البيانات الرقمية من المراجع [21-25]: $T_i = 0.03eV$ ، $T_e = 3eV$ ، $q_d = 10^3 e$ ، $\mu_i = 3.5$ ، $\mu_e = 2.5$ ، $\lambda_d = 10^{-4} m$.

بههدف دراسة تأثير الحرارة الفانقة للأيونات في غمد ديباي لحبيبة الغبار على قوة الاستقطاب تم رسم تغيرات بارامتر الاستقطاب بتابعية البارامتر فائق الحرارة وحصلنا على المنحني المبين في الشكل رقم (2).

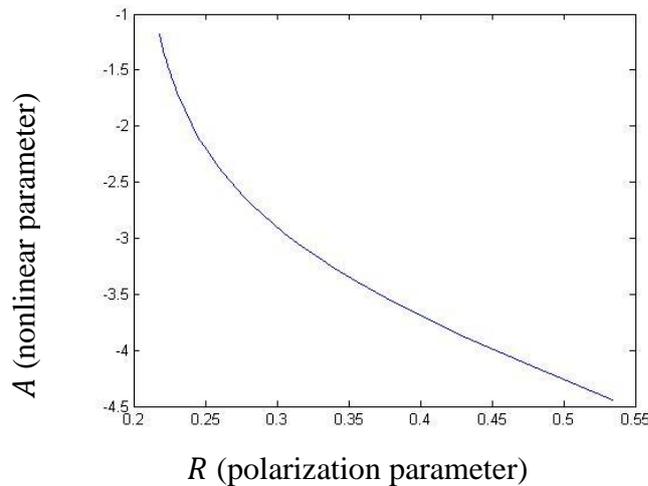


الشكل (2): تغيرات بارامتر الاستقطاب بتابعة البارامتر فائق الحرارة، $T_e = 3eV$ ، $T_i = 0.03eV$.

يظهر الشكل (2) تناقص قيمة بارامتر الاستقطاب مع تزايد قيمة البارامتر k . أي أن قوة الاستقطاب تزداد وتقترب من الواحد في حالة الحرارة الفائقة المرتفعة للأيونات (قيم منخفضة للبارامتر k). ويفسر ذلك بأن الأيونات التي تمتلك قيم منخفضة للبارامتر k تزداد طاقتها الحرارية داخل الغمد البلازمي بالنسبة لقوة التجاذب الكهربائي الساكن مما يسبب زيادة تشوه الغمد وهذا بدوره يساهم في زيادة قوة الاستقطاب.

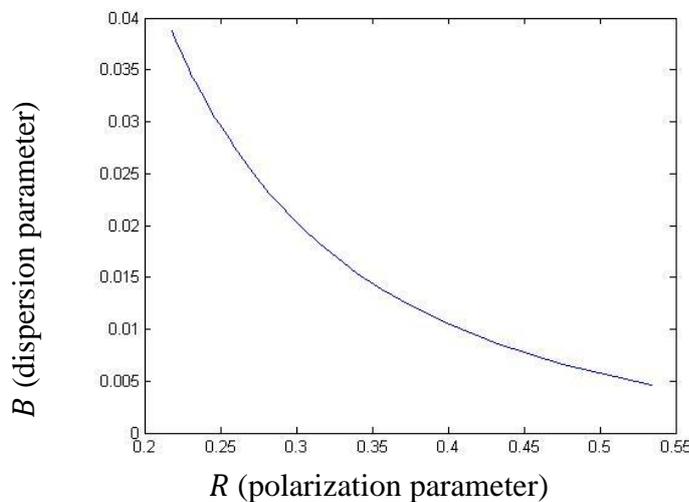
وعندما يأخذ بارامتر الاستقطاب قيمة أكبر من الواحد تصبح قوة الاستقطاب أكبر من القوة الكهربائية الساكنة مما يؤدي إلى تناقص قوة التجاذب الكولوني بين الأيونات وحبيبات الغبار، ويترافق ذلك باضطرابات غير مستقرة (unstable perturbations). توصلنا بعد مقارنة هذه النتيجة مع نتائج المرجع [15]، إلى تناقص بارامتر الاستقطاب مع تزايد قيمة البارامتر غير الحراري (nonthermal Parameter) للأيونات، يقودنا هذا الاستنتاج إلى أن الخصائص غير الحرارية للأيونات تؤدي إلى تعديل خصائص البلازما المغيرة بصورة جذرية بما في ذلك شكل الغمد المتشكل حول حبيبة الغبار سواء كانت أيونات غير حرارية أو فائقة الحرارة.

تؤثر هذه النتيجة على كلاً من معاملات اللاخطية والتبدد والتي تؤثر بدورها على سعة وعرض السوليتونات المتصادمة، والتي تنشأ في الوسط عندما يكون لكل من اللاخطية والتبدد تأثيرات متكافئة حيث تعبر اللاخطية عن ارتباط سرعة انتشار الموجة بسعتها بينما يشير التبدد إلى ارتباط سرعة انتشار الموجة بتددها، وليبيان هذا التأثير قمنا برسم تغيرات معامل اللاخطية A [من العلاقة (24)] بتابعة بارامتر الاستقطاب وحصلنا على المنحنى المبين في الشكل رقم (3).



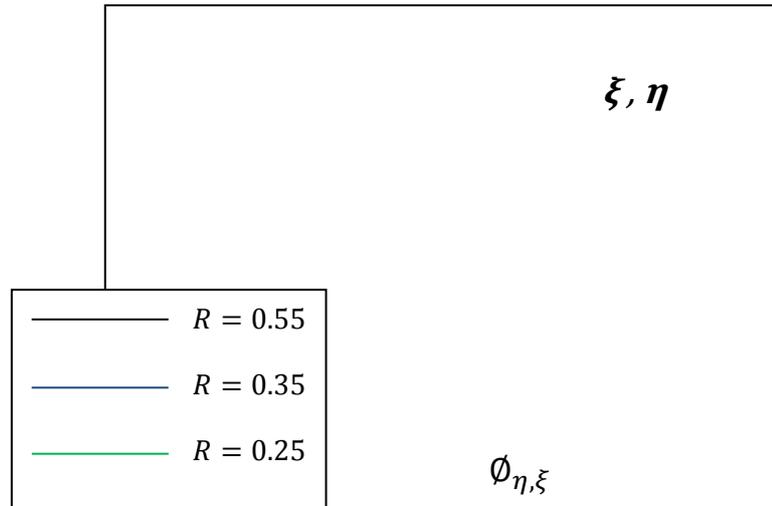
الشكل (3): تغيرات معامل اللاخطية بتابعة بارامتر الاستقطاب، $\mu_e = 2.5$ ، $\mu_i = 3.5$ ، $\sigma_i = 0.01$.

تشير الإشارة السالبة على محور معامل اللاخطية A في الشكل (3) إلى جهة تشكل السوليتون (نحو الأسفل) في الاتجاه السالب. يلاحظ من الشكل (3) أن معامل اللاخطية يزداد بازدياد قيمة بارامتر الاستقطاب. كما قمنا برسم تغيرات معامل التبدد B (من العلاقة (24)) بتابعة بارامتر الاستقطاب وحصلنا على المنحني المبين في الشكل رقم (4).



الشكل (4): تغيرات معامل التبدد بتابعة بارامتر الاستقطاب، $\mu_e = 2.5$ ، $\mu_i = 3.5$ ، $\sigma_i = 0.01$.

نلاحظ من الشكل (4) أن معامل التبدد يتناقص بازدياد بارامتر الاستقطاب. تؤثر هذه التغيرات في معاملي اللاخطية والتبدد على سعة وعرض السوليتون، ولإظهار هذا التأثير قمنا برسم النبضة السوليتونية من أجل عدة قيم لبارامتر الاستقطاب وحصلنا على الشكل (5)



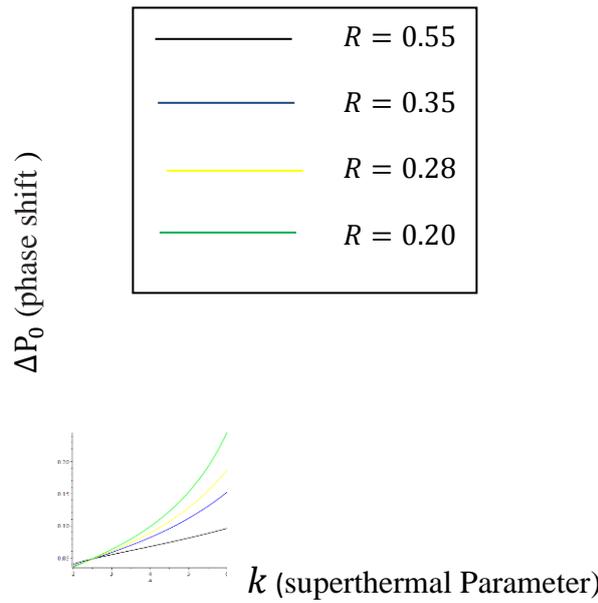
الشكل (4): تغير شكل النبضة السوليتونية بتغير قيم بارامتر الاستقطاب، $\sigma_i = 0.01$ ، $u_0 = 1$ ، $k = 4$.

يلاحظ من الشكل (5) أن سعة وعرض النبضة السوليتونية يزدادان بتناقص قيمة بارامتر الاستقطاب (أي تزايد البارامتر فائق الحرارة k). هذه النتيجة متوقعة كون سعة السوليتون تتناسب عكساً مع معامل اللاخطية والعرض يتناسب طردياً مع الجذر التربيعي لمعامل التبدد كما هو واضح في العلاقتين (26) و (28).

يعود سبب تناقص قيمة بارامتر الاستقطاب إلى تزايد قوة التفاعل الكهربائي الساكن (تفاعل كولوم) بين حبيبات الغبار المشحونة بشحنة سالبة كبيرة نسبياً والأيونات فائقة الحرارة المشحونة بشحنة موجبة. يؤدي هذا التفاعل إلى زيادة سعة الموجة السوليتونية وتناقص عرضها مما يؤدي إلى زيادة انحدار الموجة إلى أن تتحول إلى موجة صدم صوتية غبارية (dust acoustic shock wave). تتفق هذه النتيجة مع نتائج دراسة سابقة تناولت تأثير قوة الاستقطاب فائقة الحرارة على أمواج الصدم الصوتية الغبارية حيث أظهرت نتائجهم أن قوة موجة الصدم تزداد بتناقص بارامتر الاستقطاب مما يؤدي إلى تزايد قوة التفاعل الكهربائي الساكن بين حبيبات الغبار المشحونة بشحنة سالبة والأيونات فائقة الحرارة موجبة الشحنة [15].

بمقارنة هذه النتيجة مع نتائج المرجع [16] التي أظهرت أيضاً ازدياد سعة وعرض النبضة السوليتونية بتناقص قيمة بارامتر الاستقطاب (أي تزايد البارامتر غير الحراري α)، يتبين أن شكل النبضة السوليتونية يتغير بشكل واضح تحت تأثير قوة الاستقطاب في البلازما المغيرة المستقطبة وغير المتوازنة حرارياً (non Maxwellian).

بهدف دراسة تأثير قوة الاستقطاب على الانزياح الطوري للسوليتون، تم رسم تغيرات الانزياح الطوري للسوليتون (1) بتابعية البارامتر k من أجل قيم مختلفة لبارامتر الاستقطاب كما هو واضح في الشكل (5).



الشكل (5): تغيرات الانزياح الطوري للسوليتون (1) بتابعة البارامتر k ، $\sigma_i = 0.01$ ، $\mu_i = 3.5$ ، $\mu_e = 2.5$.

يلاحظ من الشكل (5) أن الانزياح الطوري يتناقص عندما تزداد قيمة بارامتر الاستقطاب، ويفسر ذلك بالتناسب الطردي بين الانزياح الطوري للسوليتون والجذر التربيعي لسعة السوليتون الذي يصطدم به كما هو واضح في العلاقتين (35) و(36) حيث أن السعة تتناقص بازدياد بارامتر الاستقطاب كما هو واضح في الشكل (4). كما يلاحظ أن الانزياح الطوري يتغير بسرعة عندما تكون قيمة k كبيرة بينما يتباطأ هذا التغير ويصبح أكثر سلاسة (smoothly) عندما تصبح قيمة k صغيرة.

في الحالة الموافقة لكون $(k \rightarrow \infty, R = 0)$ ، نحصل بعد رسم تغيرات ΔP_0 بتابعة $\delta = \frac{\mu}{\mu-1}$ (حيث $\mu = \frac{n_{i0}}{n_{e0}}$) على نفس المنحنيات التي حصل عليها Ju-Kui Xue في الشكل (2) من المرجع [17]. في الحالة الخاصة والموافقة لكون $(k \rightarrow \infty)$ تصبح البلازما متوازنة حرارياً وتخضع فيها المكونات (إلكترونات - أيونات) لتوزع مكسويل بولتزمان، ويرسم تغيرات ΔP_0 بتابعة σ_i نحصل على نفس المنحنيات التي حصلنا عليها في الشكل (5) من المرجع [26].

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا في هذا العمل بدراسة تأثير قوة الاستقطاب على السوليتونات المتصادمة في بلازما مغبرة مكونة من إلكترونات خاضعة لتوزع مكسويل بولتزمان وأيونات فائقة الحرارة خاضعة لتوزع كبا وحبيبات غبار مشحونة بشحنة سالبة، وذلك باستخدام طريقة بونكاريه - ليبل - كو حيث تم الحصول على معادلتنا كورديفيك دي فريس، والتي يمثل فيها حل كل معادلة أحد السوليتونات المتصادمة. كما تم الحصول باستخدام هذه الطريقة على الانزياحات الطورية للسوليتونات المتصادمة.

- تم التوصل إلى أن قيمة بارامتر الاستقطاب تتناقص بازدياد قيمة البارامتر فائق الحرارة للأيونات، وهذا بدوره يؤدي إلى تناقص سعة وعرض السوليتونات المتصادمة بازدياد قيمة البارامتر فائق الحرارة للأيونات.

- تبين من خلال هذه الدراسة أن الانزياحات الطورية للسوليتونات المتصادمة تتعلق أيضا ببارامتر الاستقطاب والبارامتر فائق الحرارة حيث تزداد الانزياحات الطورية بازدياد البارامتر k وتتناقص بازدياد قيمة بارامتر الاستقطاب R .
- نوصي بمتابعة هذه الدراسة على جمل بلازمية تحوي على أيونات غير حرارية (nonthermal)، وتطوير الدراسة لتشمل تصادم عدة سوليتونات بدلاً من سوليتونين وذلك باستخدام طريقة هيروتا (Hirota method).

References:

- [1] GOERTZ, C. K. *Dusty plasmas in the solar system*, *Rev. Geophys.*, vol. 27, no. 2, 1989, pp. 271–292.
- [2] HAVNES, O., MELANSO, F., HOZ, C. L., ASLAKSEN, T. *Charged dust in the earth's mesopause; effects on radar backscatter*, *Phys. Scripta*, vol. 45, no. 5, 1992, p. 433.
- [3] SHUKLA, P. K., MAMUN, A. A. *Introduction to Dusty Plasma Physics*. Bristol, U.K.: Institute of Physics, 2002.
- [4] BARKAN, A. R., MERLINO, L. *Laboratory observation of the dust-acoustic wave mode*, *Phys. Plasmas*, vol. 2, Jun. 1995, p. 3563.
- [5] PIERRARD, V., LAZAR, M. *Kappa Distributions: Theory and Applications in Space Plasmas*, Springer Netherlands, Nov. Vo. 267, 2010, PP. 153-174.
- [6] MERLINO, R. L., BARKAN, A., THOMPSON, C., ANGELO, N. *Laboratory studies of waves and instabilities in dusty plasmas*, *Phys. Plasmas*, vol. 5, no. 5, 1998, p. 1607.
- [7] MELZER, A., GOREE, J. *Low Temperature Plasmas: Fundamentals, Technologies and Techniques*, vol. 1, Eds. New York, NY, USA: Wiley, 2008, p. 165.
- [8] BONITZ, M., HORING, N., LUDWIG, P. *Introduction to Complex Plasmas*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2010, p. 156.
- [9] HAMAGUCHI, S., FAROUKI, R. T. *Polarization force on a charged particulate in a nonuniform plasma*, *Phys. Rev. E, Stat. Phys. Plasmas Fluids Relat. Interdiscip. Top.* vol. 49, no. 5, 1994, p. 4430.
- [10] HAMAGUCHI, S., FAROUKI, R. T. *Plasma-particulate interactions in nonuniform plasmas with finite flows*, *Phys. Plasmas* vol. 1, no. 7, 1994, pp. 2110–2118.
- [11] KHRAPAK, S. A., IVLEV, A.V., YAROSHENKO, V.V. *Influence of a Polarization Force on Dust Acoustic Waves*, Germany, 19 JUNE 2009, vol.1, pp.207-210.
- [12] KABALAN, N., AHMAD, M., ASAD, A. *Study of Magnetoacoustic solitons in ultra-dense quantum electron-positron-ion plasma*, *Tishreen University Journal, Syria*, Vol. (39) No. (3) 2017
- [13] GHOSH, U. N., ROY, K., CHATTERJEE, P. *Head-on collision of dust acoustic solitary waves in a four-component dusty, plasma with nonthermal ions*, 14 October 2011, vol. 18, pp. 168-172.
- [14] JAISWAL, S., PADHYAY, P. B., SEN, A. *Theoretical study of head-on collision of dust acoustic solitary waves in a strongly coupled complex plasma*, India, 11 November 2016, pp. 8.
- [15] SINGH, K., SETHI, P., SAINI, N. *Effect of Superthermal Polarization Force on Dust Acoustic Nonlinear Structures*, Vol. 73, no. 9, 2018, pp. 795-803
- [16] SINGH, K., SETHI, P., SAINI, N. *Effect of polarization force on head-on collision between multi-solitons in dusty plasma*, India, Vo. 25, 2018, pp. 12.
- [17] XUE, J.,K. *Head-on collision of dust-acoustic solitary waves*. The American Physical Society, 26 January 2004.

- [18] VAN, D., M. *Perturbation methods in fluid mechanics*. New York: Academic Press, 1964. pp. 143.
- [19] SU, C. H., RIDA, M., M., *On head-on collisions between two solitary waves*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 98, No. 3, 1980, pp. 509 – 525.
- [20] GARDNER, C. S., GREEN, J. M., KRUSKAL, M. D., MIURA, R. M. *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*. Phys. Rev. Lett. Vol. 19, 1967, pp. 1095–1098.
- [21] KHRAPAK, S. A., IVLEV, A.V., YAROSHENKO, V.V. Phys. Rev. Lett. 102, 245004 2009.
- [22] P. Bandyopadhyay, G. Prasad, A. Sen, and P. K. Kaw, Phys. Rev. Lett. 101, 065006 (2008).
- [23] GOERTZ, C., LINHUA-SHAN, K., HAYNES, O. Geophys. Res. Lett. 15, 84, <https://doi.org/10.1029/GL015i001p00084> 1988.
- [24] KLEIN, U., KERP, J. Physics of the Interstellar Medium (Argelander, Institut fur Astronomie, Bonn) 2008.
- [25] BANDYOPADHYAY, P., Prasad, G. A. Sen, and P.K. Kaw, *Experimental Study of Nonlinear Dust Acoustic Solitary Waves in a Dusty Plasma*, Phys. Rev. Lett. 101, 065006 2008.
- [26] KABALAN, N., AHMAD, M., ASAD, A. *Effect of polarization force on head on collision between acoustic solitary waves in dusty plasma*, Tartous University Journal, Syria, Vol. (3) No. (1) 2019