مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (41) العدد (1) 2019
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (41) No. (1) 2019

دراسة عن التلوين الضلعي المستمر للبيان التام n

د. نايف طلي[1]
د. محمد فراس الحلبي[2]
وفاء سيد رمضان[3]

(تاريخ الإيداع 27 / 5 / 2018. قُبِل للنشر في 24 / 2 /2019)

□ ملخّص □

كما هو معروف فإن مسألة تلوين بيان باستخدام أقل عدد من الألوان هي مسألة معقدة (NP–Hard). المشكلة تتلخص في كيفية تلوين عقد بيان بأقل عدد ممكن من الألوان وبحيث لا يكون لأي عقدتين متجاورتين اللون نفسه، أو كيف يمكن تلوين أضلاع هذا البيان بأقل عدد ممكن من الألون بحيث لا يكون لضلعين يشتركان بعقدة اللون نفسه. سنتناول في هذه الورقة البحثية نوعاً جديداً من التلوين هو التلوين الضلعي المستمر حيث أننا سنقدم خوارزميةَ تلوينٍ جديدة في التلوين الضلعي المستمر للبيان التام K_n، كما أننا سنقوم بتحديد العدد اللوني للتلوين الضلعي المستمر بشكل دقيق. الخوارزمية المقترحة تُمكننا من الحصول على تلوين ضلعي مستمر لصف البيانات التامة التي يكون عدد العقد فيها زوجياً. لقد تم تطبيق هذه الخوارزمية باستخدام لغة البرمجة المرئية Delphi حيث تمكنا من تطوير برنامجين: الأول لمستخدمي الأجهزة بنظام تشغيل Windows، والآخر لمستخدمي الهواتف الذكية باستخدام نظام تشغيل Android.

الكلمات المفتاحية: البيان، مسألة تلوين البيان، التلوين الضلعي، خوارزمية تلوين بيان، التلوين الضلعي المستمر، التلوين الضلعي المستمر للبيان التام.

[1] أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق.
[2] أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق.
[3] طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق Wafaa.sr@gmail.com .

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (41) العدد (1) 2019
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (41) No. (1) 2019

A Study about Continuous Edge Coloring for K_n Complete Graph

Dr. Naïf TULLY[4]
Dr. Mohamad Firas ALHALABI[5]
Wafaa Sayed RAMADAN[6]

(Received 27 / 5 / 2018. Accepted 24 / 2 /2019)

□ ABSTRACT □

As it's known, The Graph k-Colorability Problem (GCP) is a well-known NP-Hard Problem. This problem consists in finding the k minimum number of colors to color the vertices of a graph in such a way that any two adjacent vertices, which are connected by an edge, have always different colors. In another words how can we color the edges of a graph in such a way that any two edges joined by a vertex have always different colors. In this paper we consider a new type of coloring is the Continuous Edge Coloring (CEC), and we introduce a new effective algorithm for continuous edge coloring of the complete graph K_n, we also determine the chromatic number of continuous edge coloring accurately. The proposed algorithm allows achieving a Continuous Edge Coloring for a set of Complete Graphs when the number of vertices is even. This algorithm was implemented in the virtual programming language Delphi. Actually we develop two programs: the first one is supporting Windows platform, the second one is available for smart phones users, where it supports Android platform.

Keywords: Graph, Graph Coloring Problem, Edge Coloring Graph, Graph Coloring Algorithm, Continuously Edge Coloring, Continuous Edge Coloring for Complete Graphs.

---

[4] Associate professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Damascus University, Syria.
[5] Associate professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Damascus University, Syria.
[6] High Studies Student (Master), Mathematics Department, Faculty of Science, Damascus University, Syria. Wafaa.sr@gmail.com.

مقدمة

تُعَد مسألة تلوين البيان التي لها العَديد مِن التطبيقات العمليَّة أَحد أَكثر المسائل شهرةً وَبحثاً في نظرية البيان[5] [10] [11] . لكن الكثير من المشكلات مازالت تَتَعلق بهذه المسألة. تَعلقت هذه المسألة في البداية بالبيانات المستوية وكانت على هيئة تلوين الخريطة، فقد وضع فرانسيس غوثيري فرضية الألوان الأربعة خلال محاولة تلوين مقاطعات انجلترا [6] [7]. هذه الفرضية تنص على أن أربعة ألوان تكفي لتلوين مجموعة من المدن بحيث لا تكون هناك مدينتين متجاورتين تشتركان بنفس اللون [8] [9]. عمِل العلماء على تخفيض عدد الألوان إلى أن تم إيجاد حل المسألة عام 1976 على يد كينيث ابل وولفغانغ هيكن [2] [3] [4]. كان هذا الحل هو أول حل يعتمد على الحاسوب. المشكلة تتلخص في كيفية تلوين عُقد بيان بأقل عدد ممكن من الألوان وبحيث لا يكون لأي عقدتين متجاورتين اللون نفسه، أو كيف يمكن تلوين أضلاع البيان بأقل عدد ممكن من الألوان بحيث لا يكون لضلعين يشتركان بعقدة اللون نفسه.

تناولنا في هذه الورقة البحثية نوعاً جديداً من تلوين الأضلاع هو مسألة الحصول على تلوين ضلعي مستمر، حيث تم أخذ هذه المسألة من مسألة مفتوحة لم يتم العمل فيها من قبل [4]. تمكن [1] من تقديم خوارزمية التلوين الضلعي المستمر للبيان ثنائي التجزئة التام. الجديد في دراستنا هو أننا سنقوم باقتراح خوارزمية تلوين جديدة تُمكننا من الحصول على تلوين ضلعي مستمر لصف من البيانات التامة. بالإضافة إلى أننا تمكننا من تحديد العدد اللوني للتلوين الضلعي المستمر للبيان التام بشكل دقيق. بغية الوصول إلى هدف بحثنا نبدأ بعرض المفاهيم والتعاريف والمصطلحات الأساسية المناسبة التي سنتمكن من خلالها من مناقشة موضوع تلوين البيانات، بالإضافة إلى مفاهيم ومبرهنات شائعة في نظرية البيان، ثم نوضح أهمية وهدف البحث في الفقرة 2، كما سنقوم بعرض طرائق البحث ومواده في الفقرة 3، أخيراً نُقدم الخوارزمية التي قمنا باقتراحها والعدد اللوني المقترح في الفقرة 4 وَنختتم البحث بمجموعة من الاستنتاجات والتوصيات في الفقرة 5.

أهمية البحث وأهدافه

تكمن أهمية البحث في أن العديد من المسائل يتم تحليلها بأن تتم نمذجة الموقف الموصوف ببيان، وبعد ذلك يتم تعريف تلوين مناسب لهذا البيان لنحصل على حل للمسألة المطروحة، من أهم تطبيقات تلوين هي مسائل الجدولة Scheduling ومسائل التعيين Assignment [12] والعديد من المسائل الأخرى. يهدف البحث إلى عرض خوارزمية جديدة تمكن من تلوين أضلاع البيان التام تلويناً ضلعياً مستمراً في الحالة التي يكون فيها عدد أضلاع هذا البيان عدداً زوجياً، بالأضافة إلى تحديد العدد اللوني للتلوين الضلعي المستمر بشكل دقيق.

طرائق البحث ومواده

مفهوم البيان

يتألفُ البيانُ G من مجموعةٍ V غيرِ خاليةٍ منَ العناصرِ تدعى مجموعة العقد، معَ مجموعةٍ E كلُّ عنصرٍ منها مؤلفٌ من عنصرينِ من V، وتدعى هذهِ العناصرُ بالأضلاعِ.

تلوين البيانات Graphs Coloring [4]

تعد مسألة تلوين البيانات موضوعاً في غاية الأهمية وذلك بسبب نتائجها النظرية الواسعة ومسائلها غير المحلولة وتطبيقاتها العديدة. المسألة التي استرعت أغلب الاهتمام هي مسألة تلوين عقد بيان.

تلوين عقد بيان Vertex Coloring of Graphs

إن التلوين المناسب لعقدة proper vertex coloring في بيان G هو تخصيص لون لهذه العقدة في G بحيث يتم تلوين العقد المتجاورة بألوان مختلفة. سوف نكتفي بكلمة "تلوين عقد البيان G" للإشارة إلى تلوين مناسب للعقد في G.

إن الألوان المستخدمة يمكن أن تكون عناصراً لأي مجموعة، فالألوان الحقيقية (مثل الأحمر، الأصفر، الأزرق والأخضر) يتم اختيارها عندما نحتاج إلى عدد قليل من الألوان و خلاف ذلك سنستخدم للتلوين الأعداد الصحيحة الموجبة مثل 1,2,3,.....,k.

ولذلك فإن التلوين (المناسب) يمكن أن يُعبر عنه كدالة $c : V(G) \longrightarrow \mathbb{N}$

بحيث $c(u) \neq c(v)$ إذا كانت u , v متجاورتين في البيان G.

عندما نتحدث عن تلوين عقد (أو أضلاع) بيان وعند استخدام الأعداد الطبيعية في التلوين فإننا نكافئ بين اللون والعدد، فلا فرق لو أننا قلنا تلوين عقدة (أو ضلع) باللون 1 عن كلامنا تلوين عقدة (أو ضلع) بالعدد 1.

التلوين المناسب للأضلاع (Proper Edge Coloring)

عند تخصيص ألوان مختلفة لكل ضلعين متجاورين نسمي تلوين الأضلاع بالتلوين المناسب للأضلاع.

التلوين من الدرجة k (k–coloring)

إذا كان كل لون مستخدم هو واحد من k لوناً معطى عندئذٍ يسمى هذا التلوين بتلوين من الدرجة k . في التلوين من الدرجة k سنعتبر أن الألوان 1,2,3,.....,k مستخدمة في التلوين.

البيان القابل للتلوين من الدرجة k (k–colorable)

نقول إن البيان G قابلٌ للتلوين من الدرجة k إذا استطعنا إيجاد تلوين للبيان G من مجموعةٍ مؤلفةٍ من k لوناً. أي إذا استطعنا إيجادَ تلوينٍ له من الدرجة k.

العدد اللوني (Chromatic Number)

نسمي أصغر عددٍ k من أجله يكون G قابلاً للتلوين من الدرجة k بالعدد اللوني ونرمز له بالرمز $\chi(G)$.

مبرهنة فيزينغ (Vizing's Theorem) [4]

إذا كان G بياناً غير خالٍ عندها يكون: $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

التلوين الضلعي المستمر (Continuous Edge Coloring)

نقول عن التلوين الضلعي المناسب $ecol : E(G) \longrightarrow S$ للبيان G إنه مستمر إذا كانت الألوان المخصصة للأضلاع المؤثرة بكل عقدة ألواناً متتالية. أي أنه إذا كان الضلعان e_2, e_1 المؤثران بالعقدة v ملونين باللونين i , j حيث $i < j$، عندها توجد مجموعة من الأضلاع المؤثرة بالعقدة v تكون ملونة بالألوان الآتية:

$$i + 1, i + 2, \ldots\ldots, j - 1$$

الدليل اللوني المستمر (Continuous Chromatic Number)

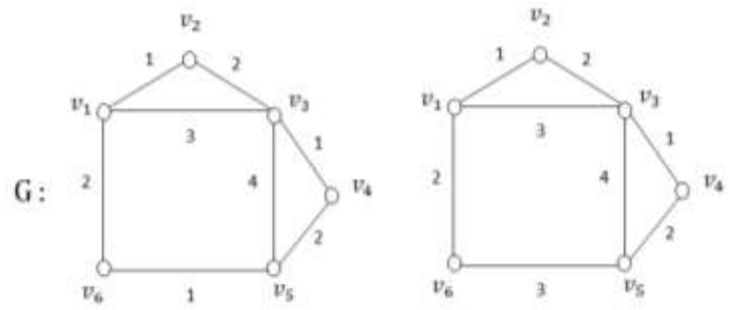
يعرف الدليل اللوني المستمر على أنه أصغر عدد صحيح موجب من أجله يملك البيان G تلويناً ضلعياً مستمراً من الدرجة k حيث (|S|=k) ونرمز له بالرمز $\chi'_c(G)$. فيما يلي سنقوم بعرض بعض الأمثلة لبيانات تحقق خاصة التلوين الضلعي المستمر.

مثال(1): هذا المثال يوضّح أنه من الممكن في بعض الحالات أن يتساوى الدليل اللوني الضلعي والدليل اللوني الضلعي المستمر: $\chi'_c(G) = \chi'(G)$ (الشكل(1) يعرض تلوينين مختلفين للبيان G)

ليكن لدينا البيان G الموضح في الشكل(a). إن أعلى درجة عقدة هي $\Delta(G) = 4$ ، بالتالي حسب مبرهنة فيزينغ:

$$\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G) + 1 \implies 4 \le \chi'(G) \le 5$$

وبما أننا استطعنا إيجاد تلوين من المرتبة الرابعة يستخدم 4 ألوان فقط بالتالي يكون الدليل اللوني $\chi'(G) = 4$.



(a) (b)

الشكل (1) تلوينان مختلفان للبيان G

إن التلوين السابق ليس تلويناً ضلعياً مستمراً حيث:

- ألوان الأضلاع المؤثرة بالعقدة v_1 هي المجموعة $\{1,2,3\}$.
- ألوان الأضلاع المؤثرة بالعقدة v_2 هي المجموعة $\{1,2\}$.
- ألوان الأضلاع المؤثرة بالعقدة v_3 هي المجموعة $\{1,2,3,4\}$.
- ألوان الأضلاع المؤثرة بالعقدة v_4 هي المجموعة $\{1,2\}$.
- ألوان الأضلاع المؤثرة بالعقدة v_5 هي المجموعة $\{1,2,4\}$.
- ألوان الأضلاع المؤثرة بالعقدة v_6 هي المجموعة $\{1,2\}$.

تتحقق الخاصة الاستمرارية عند كل العقد عدا العقدة v_5 فيختل التعريف عندها.

نلاحظ أننا في الشكل (b) استبدلنا اللون 1 باللون 3 ستتحقق الخاصة الاستمرارية عند جميع العقد أي أن $\chi'_c(G) = 4$

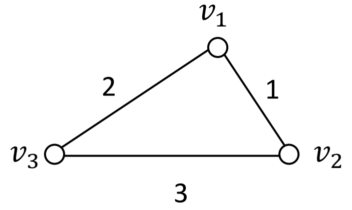
مثال(2): في هذا المثال نأخذ الحلقة الثلاثية C_3 الشكل (2) فنجد أنه ليس بالضرورة أن يكون لكل بيان تلوينٌ ضلعيٌ مستمرٌ، حيث يكون حسب مبرهنة فيزينغ:

$$2 \le \chi'(C_3) \le 3$$

من الواضح أن $\chi'(C_3) \neq 2$ لأنه لا يحقق تلويناً مناسباً للأضلاع وبالتالي $\chi'(C_3) = 3$.

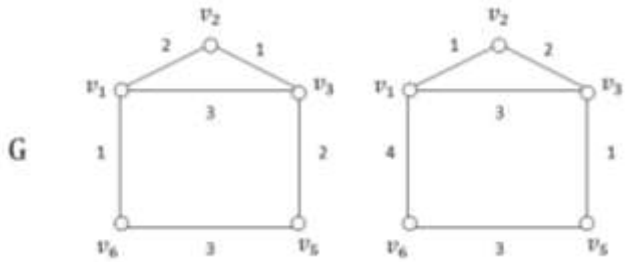
وهذا التلوين لا يحقق الخاصة الاستمرارية عند العقدة v_2 كما أن استبدال أي لون بدلاً عن اللون 3 لا يحقق الخاصة الاستمرارية.

وبذلك لا يوجد تلوين ضلعي مستمر للبيان C_3 .



الشكل (2) البيان C_3

مثال(3): في هذا المثال نعرض بياناً يكون فيه $\chi'(G)$ موجوداً ويكون $\chi'_c(G) \neq \chi'(G)$ الشكل (3) ليكن لدينا البيان G الموضح في الشكل (a):



(a) (b)

الشكل (3) تلوينان مختلفان للبيان G

إن البيان G يحوي مثلثاً، وبالتالي يحتاج على الأقل أن يلون بثلاثة ألوان أي: $\chi'(G) \geq 3$. والشكل(a) يبين لنا تلويناً ضلعياً من الدرجة الثالثة أي $\chi'(G) \leq 3$، وبالتالي $\chi'(G) = 3$. إن هذا التلوين الضلعي غير مستمر وذلك لأن شرط الاستمرارية يختل عند العقدة v_4 .

لكي يتحقق شرط الاستمرار لابد من إضافة لون جديد (اللون 4) كما هو ملاحظ. في هذه الحالة الشكل(b) حصلنا على تلوين يحقق الخاصة الاستمرارية عند جميع العقد بالتالي يكون $\chi'_c(G) =$

أي أنه من أجل البيان G يكون $4 = \chi'_c(G) \neq \chi'(G) = 3$.

بعد أن تعرفنا على طبيعة التلوين الضلعي المستمر سنطبق هذا التلوين على صفوف شهيرة من البيانا

النتائج والمناقشة

نعلم أن الدليل اللوني للبيانات التامة يعطى بالعلاقة التالية [4] :

$$\acute{\chi}(K_n) = \begin{cases} n-1 & if\ n\ even \\ n & if\ n\ odd \end{cases}$$

مسألة التلوين الضلعي المستمر (Continuous Edge Coloring Problem)

سنقوم بدراسة التلوين الضلعي المستمر للبيان التام n في الحالة التي يكون فيها عدد عقد البيان عدداً زوجياً.

وفي هذه الحالة سنحول مسألة تلوين البيان K_n تلويناً ضلعياً مستمراً إلى مسألة إيجاد مصفوفة $C = (c_{ij})_{n\times n}$ عناصرها عبارة عن أعدد طبيعية.

مصفوفة التلوين الضلعي المستمر للبيان التام $\mathbf{K_n}$

Continuous Edge Coloring Matrix for Complete Graph

سنقوم بتعريف مصفوفة التلوين الضلعي المستمر كالتالي: إن مصفوفة التلوين الضلعي C تُحَدَّد بأن تسمى الأسطر والأعمدة بأسماء عقد البيان ويكون عنصر المصفوفة c_{ij} هو اللون المعطى للضلع $e = (v_i, v_j)$ في البيان K_n.
بالإضافة إلى أننا سنفرض شرطين على المصفوفة C حتى تناسب المصفوفة طبيعة البيان التام K_n كالتالي:

1. نضع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة C أصفاراً وذلك لعدم وجود عرى في البيان K_n.
2. المصفوفة C مثلثية عليا (أو دنيا) وذلك لعدم وجود أضلاع مضاعفة في البيان K_n، حيث الضلع الذي يربط العقدتين v_i و v_j هو نفسه الذي يربط العقدتين v_j و v_i.

سنعتمد المصفوفة المثلثية الدنيا في دراستنا وهذا لا يمس بعمومية الحالة.

من أجل كل عقدة $v_k \in V(K_n)$:

ألوان الأضلاع المؤثرة بالعقدة v_k هي العناصر c_{ik}, c_{kj} بحيث: $i \neq k, j \neq k$. أي أننا بحاجة إلى اختبار خاصة الاستمرارية للعناصر على السطر k والعمود k عدا العنصر c_{kk} لأنه كما ذكرنا عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة المثلثية الدنيا المعرفة مسبقاً للبيان K_n هي أصفار.

المصفوفة التالية هي مصفوفة موافقة للبيان K_n:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ \\ v_{n-1}\\ v_n \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ c_{2\,1} & 0 & & 0 & 0\\ \vdots & & 0 & \vdots & \\ c_{n-1\,1} & c_{n-1\,2} & \cdots & 0 & 0\\ c_{n\,1} & c_{n\,2} & & c_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

على سبيل المثال ألوان الأضلاع المؤثرة بالعقدة $_{n-1}$ هي الألوان الموضحة في الشكل (4) في المصفوفة. حتى تحقق هذه المصفوفة شرط التلوين الضلعي المستمر يجب أن تكون هذه الألوان أعداداً طبيعية متتالية. وذلك من أجل كل عقدة من عقد البيان K_n.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ \\ v_{n-1}\\ v_n \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ c_{2\,1} & 0 & & 0 & 0\\ \vdots & & 0 & \vdots & \\ c_{n-1\,1} & c_{n-1\,2} & \cdots & 0 & 0\\ c_{n\,1} & c_{n\,2} & & c_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

لإيجاد تلوين ضلعي مستمر للبيان التام K_n سندرس الحالة التالية:

إذا كان n عدداً زوجياً فإننا تمكنا من إثبات وجود تلوين ضلعي مستمر للبيان التام K_n بالإضافة إلى أننا تمكننا من تحديد العدد اللوني للتلوين الضلعي المستمر سنعرضه من خلال مبرهنة.

التلوين الضلعي المستمر للبيان التام n (حيث $n = 2k$)

حسب تعريفنا السابق لمصفوفة التلوين الضلعي المستمر فإنه يكفي لتلوين البيان التام K_n أن نقوم بايجاد هذه المصفوفة. سنطبق خطوات الخوارزمية التالية:

1. نقوم بتخصيص الألوان $\{1,2,3,\dots,n-1\}$ لعناصر العمود الأول.
2. من أجل الأسطر $\{\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_4,\dots\dots,\mathrm{v}_{n-1}\}$ نطبق ما يلي: ضمن السطر الواحد كل عنصر ينتج عن سابقه بإضافة 1، إلا إذا كان العدد هو n−1 عندها يكون التالي هو 1.
3. نخصص الألوان للسطر الأخير عدا العنصر الأخير كما يلي: $col(e_{ij}) = col(e_{j+1\,j-1})$.
4. نوجد آخر عنصر في المصفوفة المثلثية الدنيا من العلاقة $\mathrm{col}(e_{n\,n-1}) = col(e_{n-2\,1})$.

سنوضح خطوات الخوارزمية السابقة بشكل تفصيلي وعام على المصفوفات كما يلي:

إن المصفوفة الموافقة للبيان K_n كما تم تعريفها مسبقاً هي:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \\ v_{n-1} \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{2\,1} & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots & \\ c_{n-1\,1} & c_{n-1\,2} & \cdots & 0 & 0 \\ c_{n\,1} & c_{n\,2} & & c_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

سنوضح كيفية التلوين الضلعي المستمر بأصغر دليل ضلعي لوني مستمر كما يلي:

- حسب الخطوة 1 من الخوارزمية نلون عناصر العمود الأول بالألوان $\{1,2,3,\dots,n-1\}$

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \\ v_{n-1} \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots & \\ n-2 & c_{n-1\,2} & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & c_{n\,2} & & c_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- حسب الخطوة 2 من الخوارزمية من أجل الأسطر $\{v_3, v_4, \ldots\ldots, v_{n-1}\}$ نطبق ما يلي:

ضمن السطر الواحد كل عنصر ينتج عن سابقه بإضافة 1، إلا إذا كان العدد هو $n-1$ عندها يكون التالي هو 1.

- حسب الخطوة 3 من الخوارزمية يتم تلوين السطر الأخير عدا العنصر الأخير كما يلي:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \\ v_{n-1} \\ v_n \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots & \\ n-2 & 1 & & 0 & 0 \\ n-1 & c_{n\,2} & \cdots & c_{n\;n-1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

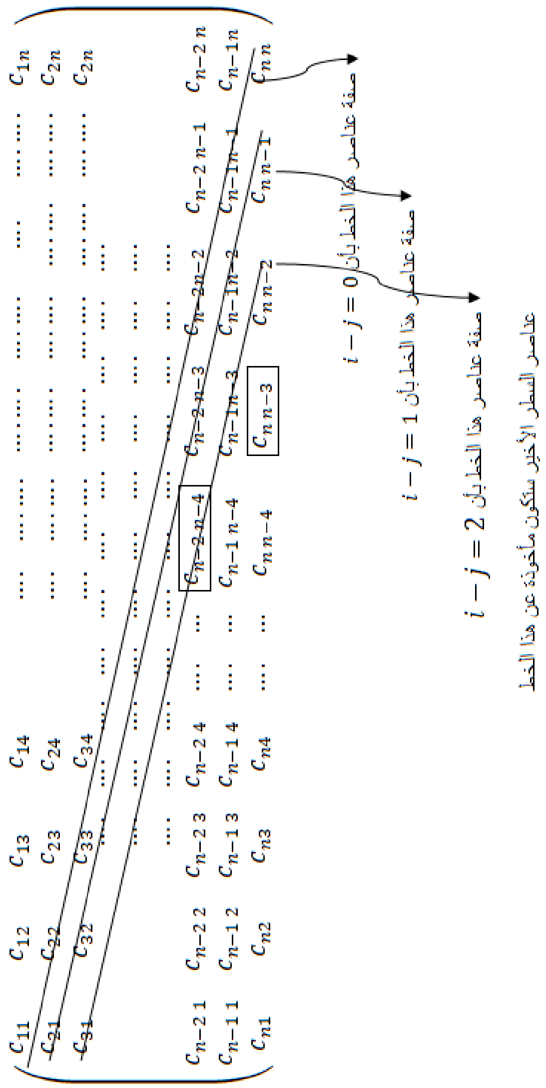
$$col(e_{ij}) = col(e_{j+1\; j-1})$$

وذلك لأنه في أي مصفوفة يتحقق فيها عدة خواص سنستفيد منها موضحة في الشكل(5).

سنعطي العنصرين $c_{n\,n-3}$ و $c_{n-2\,n-4}$ على سبيل المثال نفس اللون ،حيث أنهما لا يقعان على نفس السطر والعمود لعقدة واحد.

- حسب الخطوة 4 من الخوارزمية يعطى آخر عنصر في المصفوفة المثلثية الدنيا بالشكل

$$\mathrm{col}(e_{n\,n-1}) = col(e_{n-2\;1})$$



الشكل(5) مصفوفة التلوين الضلعي المستمر للبيان التام K_n

نتيجة:

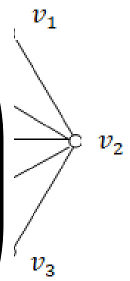
نستنتج مما سبق أنه إذا كان عدد عقد البيان التام K_n عدداً زوجياً فإن هناك تلوين ضلعي مستمر لهذا البيان ويعطى العدد اللوني له بالعلاقة:

$$\acute{\chi}_c(K_n) = n - 1$$

مثال سنقوم بتلوين البيان K_6 الشكل (9) اعتماداً على المبرهنة السابقة بطريقة مفصلة:

1. نلون عناصر العمود الأول بالألوان $\{1,2,3,4,5\}$ كالتالي:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & ? & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & ? & ? & 0 & 0 & 0 \\ 4 & ? & ? & ? & 0 & 0 \\ 5 & ? & ? & ? & ? & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



الشكل (6) البيان التام K_6

2. من أجل الأسطر v_3, v_4, v_5 نطبق ما يلي:

ضمن السطر الواحد كل عنصر ينتج عن سابقه بإضافة 1، إلا إذا كان العدد هو 5 عندها يكون التالي هو 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & ? & ? & ? & ? & 0 \end{pmatrix}$$

يتم ملئ السطر الأخير بطريقة نوضحها من خلال المصفوفة التالية :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & \boxed{c_{42}} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & \boxed{c_{63}} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix}$$

صفة عناصر هذا الخط بأن $i - j = 0$

صفة عناصر هذا الخط بأن $i - j = 1$

صفة عناصر هذا الخط بأن $i - j = 2$

عناصر السطر الأخير ستكون مأخوذة عن هذا الخط

على سبيل المثال سنعطي العنصرين c_{63} و c_{42} نفس اللون، حيث أنهما لا يقعان على نفس السطر والعمود لعقدة واحد، إن عناصر السطر الأخير عدا آخر عنصر تتبع القاعدة :

$$col(e_{ij}) = col(e_{j+1\ j-1})$$

حددنا الألوان ضمن مجموعة من الأشكال بهدف التوضيح

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & \boxed{4} & 5 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 5 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
5 & 2 & \boxed{4} & 1 & ? & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

أما آخر عنصر في المصفوفة المثلثية يعطى بالشكل $\mathrm{col}(e_{n\,n-1}) = col(e_{n-2\,1})$
بالتالي تصبح المصفوفة على الشكل التالي:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
\ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
\boxed{3} & 4 & 5 & \ddots & 0 & 0 \\
4 & 5 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\
5 & 2 & 4 & 1 & \boxed{3} & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

نلاحظ أن العناصر في السطر الرابع والعمود الرابع على سبيل المثال تحقق خاصة التلوين الضلعي المستمر وذلك محقق أيضاً من أجل جميع العقد.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 5 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

خوارزمية التلوين الضلعي المستمر على البيان التام K_n $(n = 2k)$

Continuous Edge Coloring Algorithm on Complete Graph

في الحالة العامة تعطي الخوارزمية التالية تلويناً ضلعياً مستمراً للبيان التام K_n الذي يكون عدد عقده عدداً زوجياً.

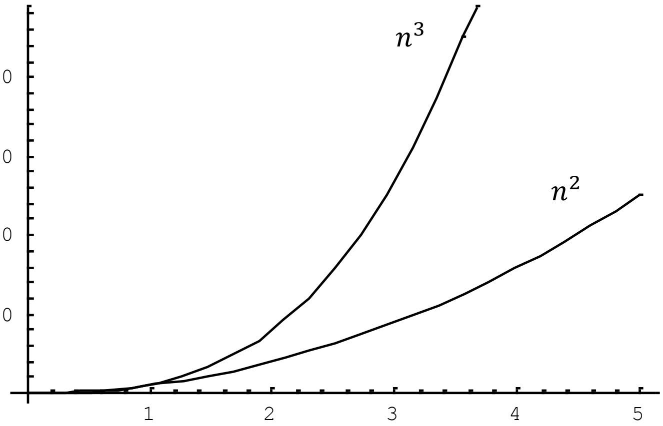
```
If (n mod 2=0) then
 Begin
   For i:=1 to n do
     For j:=1 to n do
       Begin
         If (i>j) then
           Begin
             If (j=1) then col(e_ij)= i-1;
             If (i=n) then
                 Begin
                      col(e_n n−1)= col(e_n−2 1);
                      col(e_ij)= col(e_i j+1);
                 End
              Else if (col(e_ij)= n-1)then col(e_ij)=1
             Else col(e_ij)= col(e_i j−1)+1;
         End
       Else col(e_ij)='*';
  End;
```

هناك العديد من الخوارزميات لتلوين البيانات ومن أكثر هذه الخوارزميات شهرة وفاعلية هما: الخوارزمية الشرهة Greedy Algorithm وخوارزمية RLF Recursive Largest First [12].

- إنَّ هدفَ الخوارزميتين (الشرهة وRLF) هو تلوينُ عقدِ البيانِ باعتمادِ التلوينِ المناسبِ للعقدِ، أمَّا هدفُ خوارزميتنا بالإضافة إلى التلوين المناسب هوَ تلوينُ أضلاعِ البيانِ باعتمادِ التلوينِ الضلعيِّ المستمرِ.
- تعتمدُ خوارزميَّتنا على فكرةِ المصفوفاتِ، حيثُ قُمنا بتعريفِ مصفوفةِ تلوينٍ موافقةٍ للبيانِ التامِ وَيتمُّ تلوينُ البيانِ بملءِ عناصرِ المصفوفةِ الموافقةِ. أما الخوارزميتين السابقتين اعتمدَت على تجزئةِ عقدِ البيانِ إلى صفوفٍ لونيةٍ، أو تقسيمِ العقدِ إلى مجموعاتٍ مستقلةٍ، بحيثُ تعطى كلُّ العقدِ في المجموعةِ المستقلةِ لوناً واحداً.
- لم تَتَمكَّن الخوارزميتين السابقتين من إيجادِ عددٍ لونيٍّ محدَّد بينما تمكنا من إيجاد صيغة محددة للعدد اللوني.
- بحساب كلفة الخوارزمية المقترحة نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} n = O(n^2)$$

بالرغم أن كلفة الخوارزمية الشرهة هي $O(n^2)$ إلا أنها خوارزمية تعتمد على التجربة (heuristic) لا تتمكن من إعطاء تلوين أصغري للبيان في كل مرة. كما أن كلفة خوارزمية RLF هي $O(n^3)$ وهي كلفة عالية بالمقارنة مع خوارزميتنا المقترحة .الشكل (7) يوضح مقارنة بين كلفة خوارزميتنا المقترحة مع خوارزمية RLF



الشكل (7) مقارنة كلفة الخوارزمية المقترحة مع كلفة خوارزمية RLF

الاستنتاجات والتّوصيات

قدمنا في هذه الورقة البحثية خوارزمية تلوين جديدة تُمكّننا من الحصول على تلوين ضلعي مستمر للبيانات التامة التي يكون عدد العقد فيها زوجياً كما أننا حددنا العدد اللوني للتلوين الضلعي المستمر بشكل دقيق. سنقوم لاحقاً بدراسة إمكانية التلوين الضلعي المستمر من أجل البيانات التامة التي يكون عدد العقد فيها فردياً.

المراجع

[1] ALHALABI, M. F. *An Algorithm for Continously Edge Coloring a set of graphs*, Albaath magazine, Syria, 2016, 75-105.

[2] BRÉLAZ, D. *New Methods to Color the Vertices of a Graph*. Communications of the ACM, USA, Vol. 22, No. 4, 1979, 251-256.

[3] BYSKOV, J.M. *Enumerating Maximal Independent Sets with Applications to Graph Coloring*, Operations Research Letters, Vol. 32, No. 6, 2004, 547-556.

[4] CHARTRAND, G.; ZHANG, P. *Chromatic Graph Theory*. 2nd ed., CRC Press, U.S.A, 2009, 438.

[5] DUFFY, K.; O'CONNELL, N; SAPOZHNIKOV, A. *Complexity Analysis of a Decentralized Graph Coloring Algorithm*, Information Processing Letters, Vol. 107, No. 2, 2008, 60-63.

[6] FOMIN, F.V.; GASPERS, S.; SAURABH, S. *Improved Exact Algorithms for Counting 3- and 4-Colorings*, Proc. 13th Annual International Conference: COCOON, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Canada, Vol. 4598, 2007, 65–74.

[7] GURUSWAMI, V.; KHANNA, S, *On the Hardness of 4-coloring a 3-colorable Graph*, Proceedings of the 15th Annual IEEE Conference on Computational Complexity, Pennsylvanie, 2000, 188–197.

[8] HALLDÓRSSON, M. M., *A Still Better Performance Guarantee for Approximate Graph Coloring*, Information Processing Letters, The Netherlands, Vol. 45, No. 1, 1993, 19–23.

[9] HOLYER, I., *The NP-completeness of Edge-Coloring*, SIAM Journal on Computing, Vol. 10, No. 4, 1981, 718-720.

[10]JENSEN, T. R.; TOFT, B., *Graph Coloring Problems*, 1st ed., Wiley, New York, 1994, 320.

[11]KUHN, F., *Weak Graph Colorings*, Distributed Algorithms and Applications, Proceedings of the 21st Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures, 2009, 138–144.

[12] LEWIS, R., *A Guide to Graph Colouring Algorithmes and Applications*. 1stEd. Berlin, Springer. 2015.

[13]Malyshev, D., *Complexity Classification of the Edge Coloring Problem for a Family of Graph Classes*, Discrete Mathematics and Applications, Vol. 27, No. 2, 2017, 97-101.

[14]MARX, D. *Graph Coloring Problems and their Applications in Scheduling*, Electrical Engineering, 2004, 11–16.