مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (4) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (4) 2014

تعيين نواة المضلعات المتعامدة النجمية ثنائية الترابط عندما تكون المركبة المحدودة للمتممة مستطيلاً

نجود حسن*

(تاريخ الإيداع 26 / 5 / 2014. قُبِل للنشر في 6 / 7 /2014)

□ ملخّص □

تهتم الرؤية الدرجية بدراسة المضلعات المتعامدة، ومن أهم المواضيع التي دُرست هو تعيين نواة المجموعة النجمية درجياً، فقد توصل الباحث تورانزوس إلى نتيجة هامة جداً في تعيين نواة المجموعة النجمية في حالة الرؤية العادية. ثم أثبتت الباحثة مارلين برين صحة نظريّة مرادفة لهذه النتيجة في حالة الرؤية الدرجية، كما تمكنت من إيجاد طريقة لتعين نواة المضلع المتعامد النجمي درجياً عندما يكون المضلع المتعامد بسيط الترابط.

يهدف البحث إلى تعميم الطريقة السابقة عندما يكون المضلع المتعامد ثنائي الترابط والمركبة المحدودة للمتممة مستطيلاً حيث سنثبت صحة النتيجة الآتية:

لتكن $S \subseteq R^2$ ، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداً مغلقاً ثنائي الترابط، حيث إنّ المجموعة S نجمية درجياً، عندئذ إذا كانت جبهة المركبة المحدودة B للمجموعة $R^2 \setminus S$ مستطيلاً فإن نواة S تتألف من مركبة أو مركبتين أو أربع مركبات.

Key words: orthogonal polygons, sets starshaped via staircase paths.

* قائمة بالأعمال – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (4) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (4) 2014

Specifying the Kernels of the Starshaped Orthogonal Polygons which are Secondly Connected when the Component of the Complement is a Rectangle

Njod Hassan*

(Received 26 / 5 / 2014. Accepted 6 / 7 /2014)

□ ABSTRACT □

The staircase visibility concerns with the study of orthogonal polygon, one of the most important subjects which are studied is the Specification kernel of the orthogonal starshaped set. Toranzos represent a very important result in Specifying the kernel of the starshaped set in the usual notion of visibility via segments, after that Breen presented an analogue to this result of the staircase visibility. She also could find a way for Specifying the kernel of starshaped orthogonal polygon when this orthogonal polygon is a simply connected.

The aim of this paper is generalizing the previous way when the orthogonal polygon is secondly connected and the bounded component for the complement is a rectangular; we will prove the following result:

Let $S \subseteq \mathrm{R}^2$, $S \neq \emptyset$ be secondly connected closed orthogonal polygon, and staircase starshaped set. If the boundary of the bounded component B for the complement $\mathrm{R}^2 \setminus \mathrm{S}$ is a rectangle ,so the kernel of S is either one component or two or four ones.

Key words: orthogonal polygons, sets starshaped via staircase paths.

*Academic Assistant, Mathematic Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria

مقدمة:

منذ ظهور نظرية المجموعات النجمية إلى النور اهتم الباحثون بمسألة إيجاد معايير نجمية مجموعة ما من خلال دراسة جميع نقاط هذه المجموعة أو بعض هذه النقاط، كأن ندرس نقاط جبهة المجموعة أو بعض نقاط الجبهة أو دراسة عدم وجود زوج مستقل من النقاط في المجموعة أو غير ذلك، ومع ذلك فإن تعيين نواة المجموعة النجمية لم يكن أقل أهمية لاسيما أن نقاط النواة هي النقاط الأكثر أهمية في المجموعة النجمية.

ومن أهم المعايير التي بحثت في النواة هي النظرية المشهورة لـ تورانزوس 1967،[1] والتي تنص (إذا كانت $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{R}^2$ مجموعة نجمية فإن النواة المحدبة للمجموعة $\boldsymbol{S}$ هي تقاطع جميع المجموعات المحدبة العظمى في $\boldsymbol{S}$) وذلك في حالة الرؤية العادية، وفي عام 1992 أثبتت الباحثة مارلين برين [2] صحة نظرية مرادفة لهذه النظرية باستخدام مفهوم الرؤية الدرجية عندما تكون المجموعة $\boldsymbol{S}$ مضلعاً متعامداً بسيط الترابط، وفي عام 1992 تمكنت الباحثة برين [2] من وضع طريقة لإيجاد نواة المضلع المتعامد بسيط الترابط والنجمي درجياً عندما تكون جبهته خطاً مغلقاً بسيطاً أو خطاً مغلقاً يقطع نفسه وذلك بالاستفادة من العمل[3] الذي يهتم بتعيين نواة المجموعة النجمية المتعامدة. ولكن عندما يكون المضلع المتعامد ثنائي الترابط فإن الطريقة السابقة غير كافية، ولا توجد طريقة عامة واحدة لإيجاد النواة حيث إنّه للمركبة المحدودة للمتممة أشكالاً مختلفة وأوضاعاً مختلفة وكل من جبهة المركبة المحدودة للمتممة ووضعها يؤثر في نواة المجموعة النجمية. وفي بحثنا هذا سوف نناقش الحالة التي تكون فيها المركبة المحدودة للمضلع المتعامد المغلق النجمي المدروس مستطيلاً.

وهكذا كانت الرؤية الدرجية موضع اهتمام الكثير من الباحثين علماً أن مفهوم الرؤية الخطية قدّم العديد من النتائج القيمة في التحدب [4]، وكذلك تم إيجاد الكثير من المرادفات في حالة الرؤية الدرجية كانت أكثر أهمية من تلك في حالة الرؤية العادية.

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية البحث من كونه يقدم إضافات جديدة في نظرية المجموعات النجمية في حالات متقدمة منها بالاستفادة من مفهوم الرؤية الدرجية، أما الهدف من البحث فهو تعيين عدد مركبات نواة المضلع المتعامد المغلق ثنائي الترابط و النجمي درجياً، وتعيين نوع هذه المركبات في بعض الحالات.

طرائق البحث ومواده:

نعتمد في بحثنا على مفاهيم وأفكار نظرية المجموعات النجمية وعلى الأبحاث العلمية المتقدمة والحديثة في مجالي التحدب والنجمية ونستخدم المفاهيم الأساسية في التبولوجيا.

تعاريف:

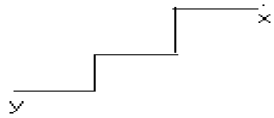
تعريف المضلع المتعامد (orthogonal polygon): [5]، [6]

لتكن $S \subseteq R^2$ مجموعة غير خالية، تدعى S مضلعاً متعامداً إذا كانت اجتماعاً مترابطاً لعدد منته من المضلعات المحدبة و التي حوافها توازي المحاور الإحداثية.

تعريف الممر الدرجي (staircase path): [5]،[6]

ليكن λ ممراً مضلعياً بسيطاً في R^2 حوافه $[v_{i-1}, v_i]; i = 1,2, \dots, n$ توازي المحاور الإحداثية ، يدعى الممر λ ممراً درجياً إذا لم يكن لأي اثنين من المتجهات المشكلة له (حوافه) $\overrightarrow{v_{i-1}\, v_i}$ اتجاهان متعاكسان.

هذا يعني أنه من أجل قيم معينة لـ i المتجهات $\overrightarrow{v_{i-1}\, v_i}$ لها الاتجاه الأفقي نفسه ومن أجل قيم معينة أخرى لـ i المتجهات $\overrightarrow{v_{i-1}\, v_i}$ لها الاتجاه العمودي نفسه حيث $i = 1,2, \dots, n$



تعريف الممر من x إلى y (x−y path): [6]، [7]

يدعى الممر λ ممراً من x إلى y في S إذا كان λ محتوى في S ويحوي النقطتين الطرفيتين x و y .

تعريف الرؤية الدرجية (staircase visibility): [6]، [7]،[8]

لتكن $S \subseteq R^2$ مجموعة كيفية ولتكن $x, y \in S$ ، يقال إن x ترى y درجياً(أو y مرئية درجياً من x) في S إذا وجد ممر درجي في S يحوي كلتا النقطتين x وy.

تعريف المجموعة النجمية درجيا (orthogonally starshaped): [5]،[9]

تدعى المجموعة S نجمية درجياً (نجمية متعامدة) إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل مثل p في S حيث أن p ترى كل نقطة في S ضمن ممرات درجية في S.

تعريف النواة الدرجية (staircase kernel): [2] [6]، [10]

مجموعة جميع النقاط p التي تكون من أجلها المجموعة S نجمية درجياً تدعى النواة الدرجية للمجموعة S ونرمز لها $Ker\ S$.

تعريف المجموعة المحدبة درجيا (staircase convex): [5]

تدعى المجموعة S محدبة درجيا (أو محدبة متعامدة) إذا كان من أجل كل نقطتين $x, y \in S$ فإن x ترى y ضمن ممرات درجية في S.

تعريف نقطة التحدب الموضعي (point of local convexity of S):[8], [4]

لتكن $S \subseteq R^2$ مجموعة غير خالية ولتكن $x \in S$ نقطة كيفية. يقال إن x نقطة تحدب موضعي للمجموعة S إذا وفقط إذا وجدت مجاورة $N \subseteq R^2$ للنقطة x حيث تكون المجموعة $N \cap S$ مجموعة محدبة.

تعريف الغور (dent of S):[2]

لتكن S مضلعاً متعامداً جبهته خط مغلق بسيط λ حيث إنّ ذرى λ مرتبة باتجاه عقارب الساعة $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \dots \dots, v_n, v_0; n \geq 3$ تدعى الحافة $[v_1 , v_2]$ من λ غوراً في S إذا وفقط إذا لم تكن S محدبة موضعياً عند كل من النقطتين v_1 ,v_2 .

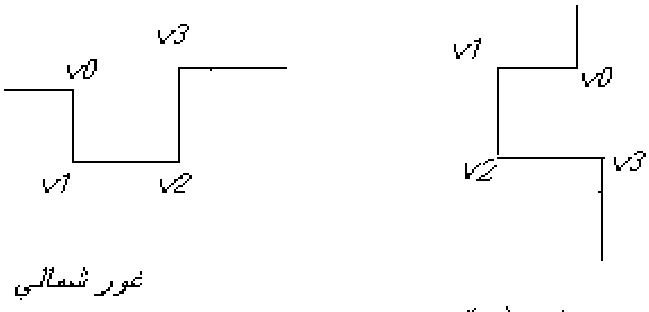
يوجد نوعان للأغوار:أفقية (أغوار شمالية وأغوار جنوبية) وعمودية (أغوار شرقية وأغوار غربية).

يدعى الغور الأفقي $[v_1 , v_2]$ غوراً شمالياً إذا وفقط إذا كانت كلتا النقطتين v_0, v_3 فوق المستقيم الحامل للحافة $[v_1 , v_2]$ ، الشكل (1) .

يدعى الغور الأفقي $[v_1 , v_2]$ غوراً جنوبياً إذا وفقط إذا كانت كلتا النقطتين v_0, v_3 تحت المستقيم الحامل للحافة $[v_1 , v_2]$.

يدعى الغور العمودي $[v_1 , v_2]$ غوراً شرقياً إذا وفقط إذا كانت كلتا النقطتين v_0, v_3 يمين المستقيم الحامل للحافة $[v_1 , v_2]$ ، الشكل (1).

يدعى الغور العمودي $[v_1 , v_2]$ غوراً غربياً إذا وفقط إذا كانت كلتا النقطتين v_0, v_3 يسار المستقيم الحامل للحافة $[v_1 , v_2]$.



الشكل(1)

سوف نستخدم الرموز الآتية: $Int\ S$، $bd\ S$، $cl(S)$ للدلالة على داخلية المجموعة S ، جبهة المجموعة S ، لصاقة المجموعة S.

النتائج والمناقشة:

مبرهنة:

لتكن $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداً مغلقاً ثنائي الترابط، حيث إنّ S نجمية درجياً، عندئذ إذا كانت جبهة المركبة المحدودة B للمجموعة $R^2 \setminus S$ مستطيلاً فإن نواة S تتألف من مركبة أو مركبتين أو أربع مركبات.

البرهان:

نعلم أنه يمكن أن تحوي المجموعة النجمية أغواراً لذلك سوف نناقش كما يلي:

إذا كانت S تحوي أغواراً شرقية، نفرض أن L_e المستقيم الحامل لحافة الغور e ذات الإحداثي x الأصغر، وأن P_e نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_e وإلى الغرب منه، وكذلك عندما تحوي S أغواراً شمالية نفرض أن L_N المستقيم الحامل لحافة الغور N ذات الإحداثي y الأصغر، وأن P_N نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_N وإلى الجنوب منه، أما إذا كانت S تحوي أغواراً غربية نفرض أن L_W المستقيم الحامل لحافة الغور w ذات الإحداثي x الأكبر، وأن P_W نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_W وإلى الشرق منه، وعندما تحوي S أغواراً جنوبية نفرض أن L_S المستقيم الحامل لحافة الغور s ذات الإحداثي y الأكبر، وأن P_S نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_S وإلى الشمال منه .

لتكن المجموعة T : $T = \left(cl(P_e) \cap cl(P_N) \cap cl(P_W) \cap cl(P_S)\right) \cap S$

(وهنا نلاحظ أنه عندما تكون S بسيطة الترابط فإن $T = Ker\ S$ ، انظر[2]،[3]) كما نلاحظ أنه $\forall x \in S \setminus T$ فإن $x \notin Ker\ S$ وذلك لأنه من أجل $x \in S \setminus T$ و x شمال L_N فإن x إما في الشمال الشرقي من N أو في الشمال الغربي من N ، ولنفرض أن x في الشمال الشرقي من N ولتكن $y \in S$ في الشمال الغربي من N.

إن أي ممر درجي λ في S من x إلى أية نقطة $z \in N$ سوف يكون اتجاهه الجنوب والغرب، وكذلك إن أي ممر درجي μ في S من $z \in N$ إلى y سوف يكون اتجاهه الغرب والشمال، وهكذا لا يمكن أن يكون $\mu \cup \lambda$ ممراً درجياً لأنه اجتماع ممرين درجيين ليس لهما الاتجاه نفسه علما أن نهاية الأول هي بداية الثاني، وهكذا لا يوجد أي ممر درجي في S من x إلى y وينتج عن ذلك أن x لا ترى y درجياً .

وبأسلوب مماثل نناقش حالة كون x جنوب L_S أو شرق L_e أو غرب L_W.

وينتج مما سبق أنه $\forall x \epsilon kerS$ فإن $x \in T$ وبالتالي $kerS \subseteq T$.

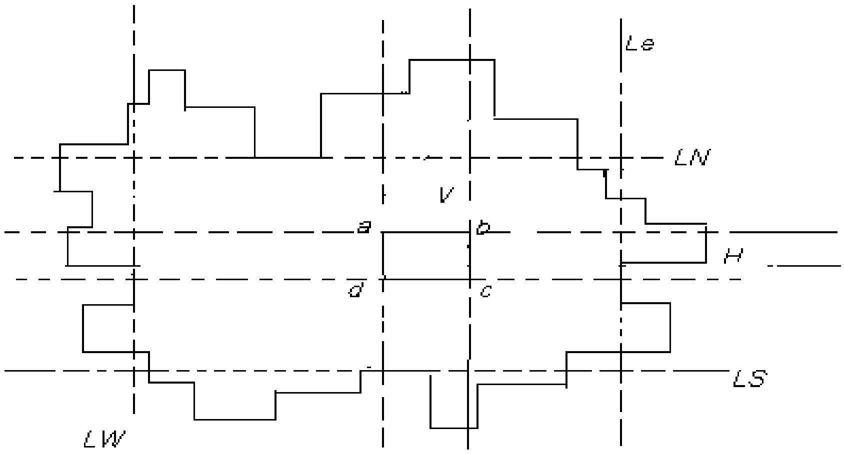
بما أن S مغلقة فإن $R^2 \setminus S$ مفتوحة وبالتالي B مفتوحة إذن $B = intB$ وهي مستطيل مفتوح وهكذا تكون لصاقة B سطح المستطيل المغلق الموافق ولنفرض أنه $abcd$ وينتج لدينا من كون $bdB = cl(B) \setminus intB$ أن bdB هي الخط المغلق الذي رؤوسه $\{a, b, c, d\}$ وبالتالي bdB هي المستطيل المغلق الموافق للمجموعة B.

ولتعيين نواة S سوف نناقش جميع الأوضاع الممكنة للمركبة المحدودة B :

الحالة الأولى: $bdB \subseteq T$

لتكن $x \in S$ نقطة شمال B ولنأخذ العمود L المرسوم في x فيقطع bdB في نقطتين مختلفتين، ولتكن $y \in S \cap L$ حيث تقع y جنوب B عندئذ يكون: $[x, y] \cap intB \neq \emptyset$، وبالتالي $[x, y] \nsubseteq S$ وبما أن $x, y \in S$ تقعان على عمود واحد L فأي ممر درجي من x إلى y عبارة عن القطعة المستقيمة $[x, y]$ ولكن $[x, y] \nsubseteq S$ أي أنه لا يوجد ممر درجي في S من x إلى y ، إذن x لا ترى y ضمن ممرات درجية في S وهكذا كل نقطة واقعة شمال B لا ترى أي نقطة جنوب B. وبالأسلوب نفسه نثبت أن كل نقطة شرق B لا ترى أي نقطة غرب B.

ولإيجاد نواة S في هذه الحالة نحذف جميع نقاط الشريطين الأفقي H والعمودي V المحددين بالمركبة المحدودة B لأنه كما أثبتنا أن أيّة نقطة من نقاطهما ليست من نقاط النواة ، وهكذا بتحقق العلاقة $(a, b) \cup (b, c) \cup (c, d) \cup (d, a) \subseteq H \cup V$ نجد أن أيّة نقطة من نقاط المجموعة $(a, b) \cup (b, c) \cup (c, d) \cup (d, a)$ ليست من نقاط النواة. أما ذرى المستطيل $abcd = bdB$ فهي تنتمي إلى T ولا تنتمي إلى H أو V وبالتالي تنتمي إلى النواة ويكون الجزء المتبقي من T عبارة عن أربعة أجزاء k_1, k_2, k_3, k_4 كل منها مركبة لنواة S تحوي ذروة من المستطيل $abcd$ ، الشكل (2) .



الشكل(2)

بعض الحالات الخاصة المتعلقة بالحالة الأولى:

1)عندما تكون إحدى ذرى جبهة المجموعة B ذروة في T فإن نواة S عبارة عن أربع مركبات إحدى هذه المركبات هي مجموعة وحيدة العنصر أو نصف مستطيل.

لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن b هي الذروة المشتركة في bdB و bdT عندئذ نلاحظ أن النقطة b تحقق إحدى الحالتين:

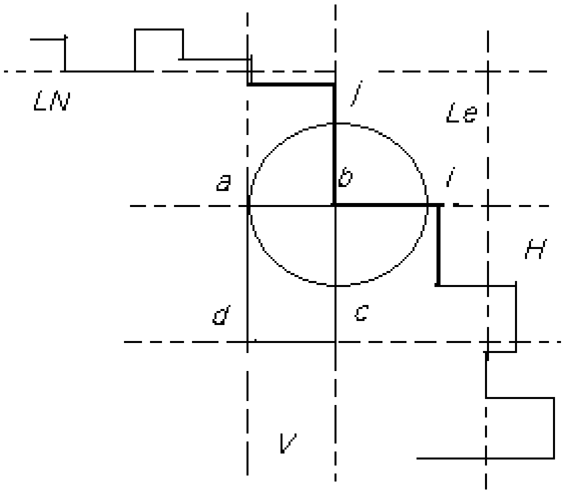
أ- عندما تكون b نقطة تحدب موضعي للمجموعة T لنفرض أن حواف T عند b هي عمودية جنوب b وأفقية غرب b (حيث نناقش بشكل مماثل في الحالات الأخرى) وحسب تعريف نقطة التحدب الموضعي توجد مجاورة N_ρ للنقطة b في$(\mathrm{R}^2, \mathrm{d})$ حيث $N_\rho \cap T$ محدبة (حيث إنّ ρ على الأكثر يساوي طول القطعة المستقيمة الأفقية أو العمودية الأصغر طولا في T والتي طرفها b مركز المجاورة N_ρ) ويكون لدينا:

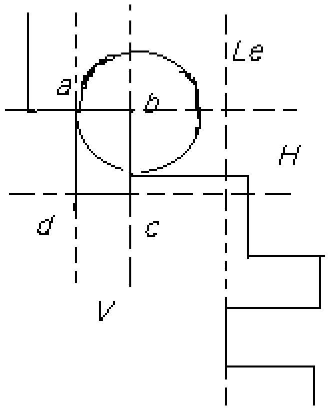
- إما $(N_\rho \cap T) \setminus (H \cup V) = \{b\}$ حيث إنّ النقاط جنوب b تنتمي إلى H والنقاط غرب b تنتمي إلى V وهكذا وجدت مجاورة N_ρ للنقطة b في $(\mathrm{R}^2, \mathrm{d})$ حيث لا تحوي من نقاط T سوى b.
- أو $(N_\rho \cap T) \setminus (H \cup V)$ يحوي b ونقاط أخرى من T (في هذه الحالة ρ أكبر تماما من قطر المستطيل $abcd$) لنأخذ المجاورة N_{ρ_1} للنقطة b في $(\mathrm{R}^2, \mathrm{d})$ بحيث ρ_1 هو عرض المستطيل $abcd$ فنجد $N_{\rho_1} \subseteq N_\rho$ وتكون $N_{\rho_1} \cap T \subseteq N_\rho \cap T$ مجموعة محدبة وبما أن T لا تحوي نقاط شرق b ولا شمال b وكذلك النقاط جنوب b تنتمي إلى H والنقاط غرب b تنتمي إلى V فإن العلاقة الآتية تكون صحيحة: $(N_{\rho_1} \cap \mathrm{T}) \setminus (\mathrm{H} \cup \mathrm{V}) = \{\mathrm{b}\}$ أي وجدت مجاورة N_{ρ_1} للنقطة b في $(\mathrm{R}^2, \mathrm{d})$ لا تحوي من نقاط T سوى b ، الشكل (3).

في كلتا الحالتين حصلنا على مجاورة للنقطة b لا تحوي من نقاط T سوى b وينتج عن ذلك أن إحدى مركبات النواة هي المجموعة وحيدة العنصر $K_1 = \{b\}$ (وهي محدبة درجيا لأن كل مجموعة وحيدة العنصر تكون محدبة درجيا).

ب-عندما لا تكون b نقطة تحدب موضعي للمجموعة T والنقطة c جنوب b ولنفرض أن حواف T عند b أفقية $[b, i]$ شرق b وعمودية $[b, j]$ شمالb (حيث نناقش بشكل مماثل في الحالات الأخرى)، من أجل أي مجاورة N_ρ للنقطة b في $(\mathrm{R}^2, \mathrm{d})$ تكون $N_\rho \cap T$ غير محدبة أيا يكن ρ صغيراً وبالتالي من أجل ρ أصغر أو يساوي

عرض المستطيل $abcd$ نجد أن $(N_\rho \cap T) \setminus (H \cup V) \subseteq [b,i] \cup [b,j]$ حيث أن كل نقطة من $[b,i]$ شمال الشريط الأفقي وكل نقطة من $[b,j]$ شرق الشريط العمودي. وهكذا وجدت مجاورة N_ρ للنقطة b تحوي من نقاط T فقط القطعتين المستقيمتين $[b,i]$, $[b,j]$ أو جزءا من كل منهما، وينتج عن ذلك أن نقاط T في هذه الجهة هي $[i,b] \cup [b,j]$ وهي مجموعة محدبة درجيا لأنها تمثل ممراً درجياً على شكل نصف مستطيل، ومما سبق نجد أن مركبة نواة S هي نصف المستطيل الممثل بالمجموعة $K_1 = [i,b] \cup [b,j]$ ، الشكل (4).





الشكل (3)

الشكل (4)

2)عندما تكون حافة واحدة فقط في جبهة B جزءاً من إحدى حواف T فإن نواة S عبارة عن أربع مركبات إحداها على الأقل قطعة مستقيمة وكل مركبة لنواة S تحوي ذروة في bdB.

بفرض أن$[i,j]$ حافة في T وأن $[b,c] \subset [i,j]$عندئذ $b,c \notin V \cup H \& (b,c) \subseteq V \cup H$ إذن $[i,b] \subseteq T \& [c,j] \subseteq T$ وكل منهما محتواة في إحدى مركبات النواة ويكون لدينا

$$K_1 \supseteq [i,b]\ ,\ K_2 \supseteq [c,j],\ K_3 \supseteq \{a\},\ K_4 \supseteq \{d\}$$

ملاحظة:

عندما تكون i نقطة تحدّب موضعي للمجموعة T فإن $K_1 = [i,b]$

وعندما تكون j نقطة تحدّب موضعي للمجموعة T فإن $K_2 = [c,j]$

وعندما تكون i,j نقطتي تحدّب موضعي للمجموعة T فإن $K_1 = [i,b]$ و $K_2 = [c,j]$

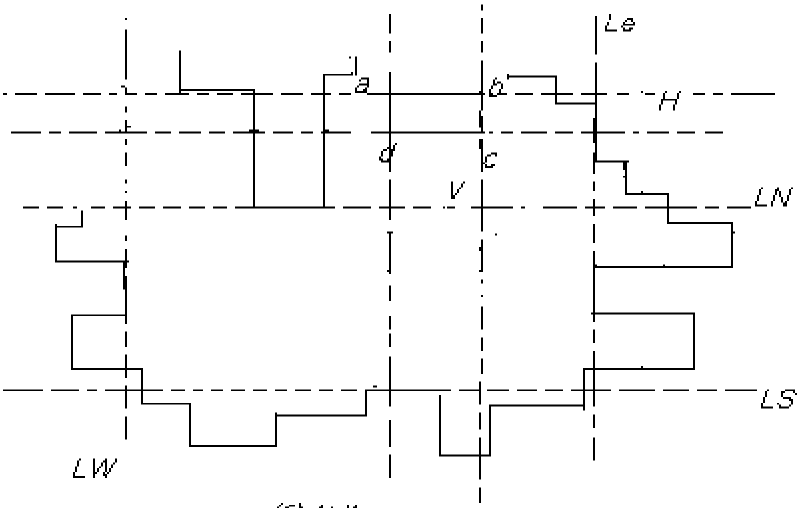
3)عندما يكون T مستطيل و $bdB = bdT$ فإن نواة S عبارة عن أربع مركبات كل منها مجموعة وحيدة العنصر تمثل ذروة في$bdB = bdT$ أي أن $K_1 = \{a\}, K_2 = \{b\}, K_3 = \{c\},\ K_4 = \{d\}$

الحالة الثانية: bdB شرق أو غرب أو شمال أو جنوب T :

لنفرض دون المساس بعمومة المسألة أن B شمال T . لقد أثبتنا أن كل نقطة ليست من T لا تكون من نواة S لذلك لاتوجد نقاط من نواة S شمال أو غرب أو شرق B وأثبتنا أيضا أن كل نقطة من T وجنوبB ليست من النواة لأنها لا ترى نقاط شمال B .

ولتعيين نواة S نحذف نقاط الشريط العموديV المحدد بالمركبة المحدودة B (حيث إنّ الشريط الأفقي H المحدد بالمركبة المحدودة B خارج T) ويكون الجزء المتبقي من T عبارة عن قسمين أحدهما شرق الشريط العمودي

والآخر غربه، وهكذا نواة S عبارة عن مركبتين إحداهما شرق الشريط العمودي V والأخرى غربه، الشكل (5). بمناقشة مماثلة عندما B شرق أو غرب أو جنوب T نجد أن لنواة S مركبتين.



الشكل(5)

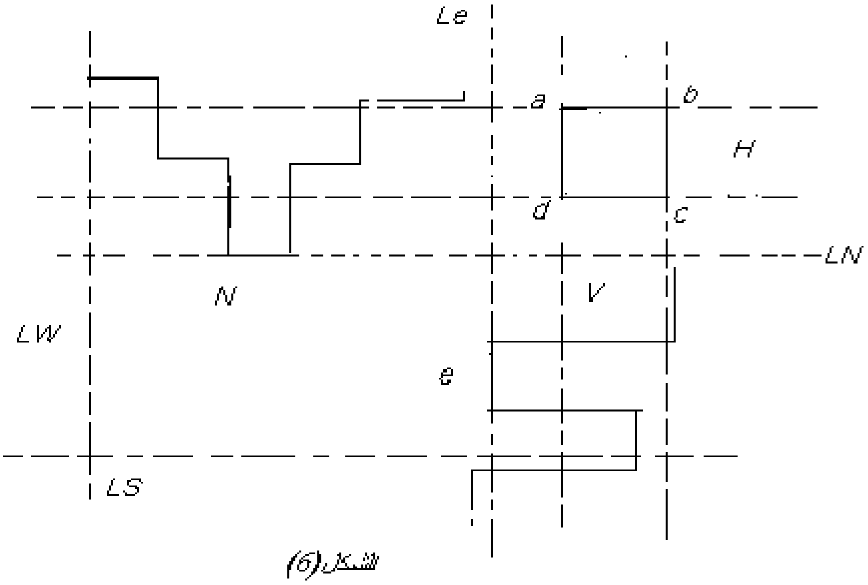
ملاحظة: قد نصادف حالة خاصة في الحالة الثانية، هذه الحالة هي الحالة عندما تتقاطع bdB مع أحد المستقيمات L_e, L_W, L_S, L_N وفي هذه الحالة تكون إحدى مركبات نواة S عبارة عن قطعة مستقيمة.

في الحقيقة إذا فرضنا دون المساس بعموميّة المسألة أن B شمال T وأن $bdB \cap L_e = [b, c]$ ، كما وجدنا سابقا بحذف نقاط الشريط العموديV المحدد بالمركبة المحدودة B يكون لنواة S مركبتان الأولى هي القطعة المستقيمة $K_1 = L_e \cap T$ والثانية نقاط T المعطاة بالعلاقة: $K_2 = T \setminus \big(K_1 \cup (T \cap V)\big)$

الحالة الثالثة: bdB في الشمال الشرقي من T:

نلاحظ أنT غرب الشريط العمودي V وجنوب الشريط الأفقي H المحددين بالمركبة المحدودة B وهكذا T لا تتقاطع مع أي منهما ويكون لدينا $T \cap V = \emptyset, T \cap H = \emptyset$ وينتج عن ذلك أن نواة S مركبة واحدة فقط هي $K = T$، الشكل(6).

بمناقشة مماثلة عندما bdB في الشمال الغربي أو الجنوب الشرقي أو الجنوب الغربي من T نجد أنه لنواة S مركبة واحدة فقط هي $K = T$.

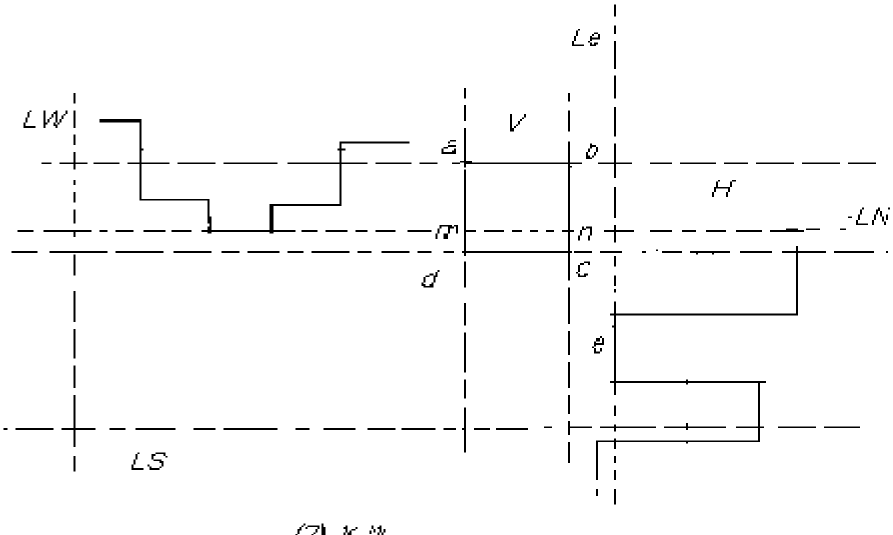


الشكل(6)

الحالة الرابعة: bdB **تتقاطع مع كل من** $intT\ ,int(S \setminus T)$:

نميز حالتين فرعيتين:

أولا: $intB$ تتقاطع مع واحد فقط من المستقيمات L_e, L_W, L_S, L_N ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن $intB \cap L_N = [m,n]$ وينتج عن ذلك أن $L_N \subset H$ وبحذف الشريطين العمودي V والأفقي H المحددين بالمركبة المحدودة B تكون بقية نقاط T عبارة عن جزأين أحدهما شرق الشريط العمودي والآخر غربه وكل منهما مركبة لنواة S ، وهذا يعني أنه لنواة S مركبتين K_1, K_2 في هذه الحالة، الشكل (7).



الشكل(7)

ثانيا: $intB$ تتقاطع مع اثنين فقط من المستقيمات L_e, L_W, L_S, L_N وغير متوازيين، ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن $intB \cap L_N \neq \emptyset \ \&\ intB \cap L_e \neq \emptyset$ وبما أن المركبة B مستطيل فهي تحوي ذروة للمجموعة T هي نقطة تقاطع المستقيمين L_e, L_N ولنفرض أن $L_e \cap L_N \cap intB = \{r\}$ وينتج عن ذلك أن $L_N \subset$

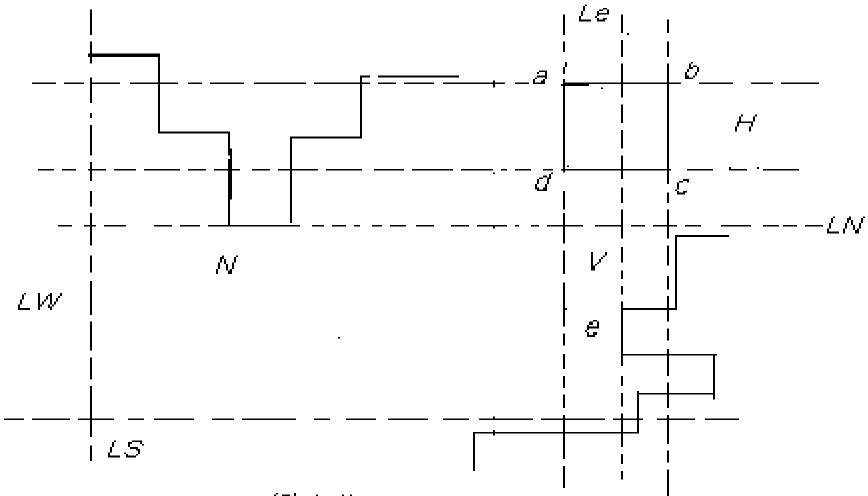
H ، $L_e \subset V$ ولتعيين نواة S نحذف الشريطين العمودي والأفقي المحددين بالمركبة المحدودة B فتكون بقية نقاط T عبارة عن مركبة لنواة S وهي مركبة وحيدة لأن كل نقطة من بقية نقاط T هي غرب الشريط العمودي وجنوب الشريط الأفقي.

ملاحظة: لا يمكن أن تتقاطع $intB$ مع مستقيمين متوازيين من المستقيمات L_e, L_W, L_S, L_N لأنه:

إذا فرضنا جدلا أن $intB \cap L_N \neq \emptyset \,\&\, intB \cap L_S \neq \emptyset$ في هذه الحالة تكون أية نقطة من T إما شرق B أو غرب B وبالتالي ليست من نقاط النواة ونعلم أن أيّة نقطة ليست من T ليست من نقاط النواة وينتج عن ذلك أن جميع نقاط S ليست من نقاط النواة،إذن S ليست نجمية درجيا، وهذا تناقض سببه الفرض الجدلي الخاطئ أن $intB$ تتقاطع مع المستقيمين المتوازيين L_S, L_N .

الحالة الخامسة: $(S \setminus T)$ $\boldsymbol{bdB \subset}$ **و** $\boldsymbol{intB}$ **تتقاطع مع واحد من المستقيمات** $\boldsymbol{L_e, L_W, L_S, L_N}$.

لنفرض دون المساس بعمومية المسألة **أن** $intB \cap L_e \neq \emptyset$ (هذا التقاطع عبارة عن قطعة مستقيمة) وهنا نلاحظ أن الشريط الأفقي المحدد بالمركبة المحدودة B خارج T أي أن $T \cap H = \emptyset$ أما الشريط العمودي فهو يحوي L_e ولذلك $T \cap V \neq \emptyset$ ولتعيين نواة S في هذه الحالة نحذف نقاط الشريط العمودي V فتكون بقية نقاط T عبارة عن مركبة واحدة هي نواة المجموعة S ونعبر عنها بالعلاقة $kerS = T \setminus V$ ، الشكل (8).



الشكل(8)

ملاحظة: عندما لا توجد أغوار من نوع معين في S (مثل الغور الشمالي N) فإننا نأخذ بدلا من $cl(P_N)$ المجموعة R^2 في إيجاد T .

الاستنتاجات والتوصيات:

1) بعد مناقشة جميع الحالات الممكنة حصلنا على طريقة لتعيين نواة المضلع المتعامد S المغلق ثنائي الترابط والنجمي درجياً عندما تكون المركبة المحدودة B للمتممة مستطيلا وهذه الطريقة تتلخص بالخطوات الآتية:

أ) إيجاد المجموعة T حيث: $T = \left(cl(P_e) \cap cl(P_N) \cap cl(P_W) \cap cl(P_S)\right) \cap S$

ب)حذف نقاط الشريطين العمودي V والأفقي H المحددين بالمركبة المحدودة B والتي تنتمي إلى المجموعة T

ج) استنتاج أن نواة S هي نقاط T باستثناء نقاط الشريطين المحذوفين.

2) إذا كانت bdB مستطيلاً & $T \neq \emptyset$ فإن B يمكن أن توجد في أي جزء من المجموعة S وتكون S نجمية درجياً إلا عندما $intB$ تقسم T إلى جزأين واقعين في جهتين متعاكستين بالنسبة إلى $intB$ في هذه الحالة لا تكون S نجمية درجياً.

3) أياً يكن موضع المركبة المحدودة B عندما يكون $bdB \subseteq T$ فإن نواة S عبارة عن أربع مركبات كل منها تحوي ذروة في T .

4) أيا يكن موضع المركبة المحدودة B شرق أو غرب أو شمال أو جنوب T فإن نواة S عبارة عن مركبتين.

5) أيا يكن موضع المركبة المحدودة B في الشمال الشرقي أو الشمال الغربي أو الجنوب الشرقي أو الجنوب الغربي من T فإن نواة S عبارة عن مركبة واحدة، وكذلك عندما $bdB \subset (S \setminus T)$ و $intB$ تتقاطع مع واحد من المستقيمات L_e, L_W, L_S, L_N تكون نواة S عبارة عن مركبة واحدة.

6) عندما تكون bdB مستطيلاً فإن مركبات النواة تأخذ أشكالاً متعددةً نذكر منها: مجموعة وحيدة العنصر، قطعة مستقيمة، نصف مستطيل، مستطيلاً، اجتماع نصف مستطيل وممراً درجياً، اجتماع نصف مستطيل وممرات درجية حيث لا يحوي الاجتماع أغوار،.....

7) عندما تكون bdB مستطيلاً فإن نواة S عبارة عن مركبة أو مركبتين أو أربع مركبات.

8) نوصي بدراسة حالات مماثلة عندما bdB ليست مستطيلاً و نوصي بدراسة حالات مماثلة عندما تكون المجموعة S ثلاثية الترابط أو رباعية الترابط أو.....ومحاولة إيجاد حالة عامة في حالة كون S متعددة الترابط وكذلك نوصي بتعميم هذه الدراسة إلى R^3 ومن ثم إلى R^n.

المراجع:

1-TORANZOS,F.A. *Radial functions of convex and star-shaped bodies*. Am.Math.Monthly , Vol. 74, 1967, 278–280.

2-BREEN,M. *Staircase kernels in orthogonal polygons*. Arch. Math, Vol.59, 1992,588-594.

3-MOTWANI,R.،RAGHUNATHAN,A.،SARAN,H. *Covering orthogonal polygons with star polygons*: The Perfect Graph Approach. J.Comput.System Sci,Vol.40,1990,19-48.

4-VALENTINE,F.A.*Convex sets*. McGraw. Hill, New York, 1964.

5-BREEN,M. *Generating the kernel of a staircase starshaped set from certain staircase convex subsets*. Periodica Math. Hungarica,Vol.64,N1, 2012,29-37.

6- BREEN,M. *Generating a staircase starshaped set from a minimal collection of its subsets*. Beitr Algebra Geometrie, Vol. 52, 2011, 113-123.

7- BREEN,M. *Generating a staircase starshaped set and its kernel in* $\mathbb{R}^3$ *from certain staircase convex subsets*. Beitr Algebra Geom. 2011.

8-BREEN,M. *Simply connected orthogonal polygons as unions of two orthogonally starshaped sets*. J. Geom. Vol. 82, 2005, 025-035.

9-BREEN,M. *Dimensions of staircase kernels in orthogonal polygons*. Geometriae Dedicata, Vol .49, 1994,323-333.

10-BREEN,M. *An improved Krasnosel'skii type theorem for orthogonal polygons which are starshaped via staircase paths*. J.Geom.Vol. 51,1994, 31–35.