مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (2) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (2) 2018

# ميكانيك جملة(منظومة) جسيمات في نظرية النسبية

**الدكتور علي عسَّاف***

**(تاريخ الإيداع 17 / 1 / 2018. قُبِل للنشر في 5 / 4 /2018)**

## □ ملخّص □

تُعد دراسة ميكانيك جمل(منظومات) الجسيمات في نظرية النسبية الخاصة من أكثر المسائل تعقيداً. لكن وعلى الرغم من ذلك فإن هذه الدراسة تضعنا أمام وضع حجر الأساس لبناء مجموعة من القوانين الهامة. حيث تم تعيين حركة جمل جسيمات ككل من خلال طاقتها واندفاعها وكتلتها السكونية، كما تبيَّن أن تعيين الطاقة الكلية للجملة ذات الأفعال المتبادلة يتطلب الأخذ بالحسبان طاقات هذه الأفعال المتبادلة بين الجسيمات.

وخلافاً لجمل الأفعال المتبادلة من جراء التصادمات، تم تعيين صيغ تقريبية للأفعال المتبادلة بين الجسيمات المشحونة من خلال دراسة تصادم الجسيمات النسبوية– مفعول كومبتون.

تم أخيراً دراسة حالة حركة جمل الجسيمات المشحونة ضعيفة الفعل المتبادل، ومناقشة حركة الجسيمات المترابطة مع بعضها من خلال الأفعال الكهرطيسية المتبادلة باستخدام مفهوم الفعل المتبادل بين جسيمات الجملة.

**الكلمات المفتاحية:** طاقة واندفاع الفعل المتبادل في النسبية، مفعول كومبتون، الكمون الكهرطيسي المتأخر، تأخر زمني، التحويلات المعيارية، تابع لاغرانج.

* أستاذ مساعد – قسم الفيزياء، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية – سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (2) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (2) 2018

# Mechanics of particles system in the Theory of Relativity

**Dr. Ali ASSAF***

**(Received 17 / 1 / 2018. Accepted 5 / 4 /2018)**

## □ ABSTRACT □

Studying the mechanics of particle systems in special relativity is one of the most complex issues. However, this study sets us up to lay the groundwork for building a set of important laws. The motion of particle masses as a whole was determined by their energy, impulse and static mass. It was also found that the total energy of the system of mutual action requires taking into account the energies of these mutual acts between the particles.

Contrary to the systems of the mutual acts of collisions, approximate formulas for interplay between charged particles were determined by studying the collision of relativistic particles-Compton's effect.

Finally, the case of the movement of the charged particles of weak interacts was discussed, and the movement of the interconnected particles was discussed through mutual electromagnetic acts using the concept of mutual action between the particles of the system.

**Key words**: energy and impulse of mutual action in relativity, Compton effect, retarded electromagnetic potential, time delay, gauge transfers, Lagrange function.

*Associate Prof. at the Department of Physics, Science Faculty, Tishreen Uni., Lattakia –Syria.

## مقدمة

من الممكن تعيين جملة(منظومة) جسيمات ككل من خلال طاقتها $E$ واندفاعها $\vec{P}$ وكتلتها السكونية $M$. فإذا كان بالإمكان اهمال الظواهر (المفاعيل) الداخلية في الجملة، وتوضعها المكاني في داخلها، واعتبارها بمثابة نقطة مادية واحدة، كان بالإمكان كتابة العبارة الاتية لطاقة هذه الجملة ككل:

$$E = Mc^2 \qquad (1.1)$$

علماً أن $M$ الكتلة السكونية لهذه الجملة بكاملها، ونظراً لأن $M > 0$ دائماً، فإن طاقة جملة الجسيمات تكون كطاقة جسيم حر واحد، من حيث كونها كمية موجبة.

لكن ليس بالإمكان في الحالة العامة تعيين صيغة كل من طاقة واندفاع الجملة من خلال(بوساطة) الكميات التي تعين المقادير الموافقة للجسيمات المنفصلة، أو إيجاد العلاقة العامة بين الطاقة والكتلة. فالأفعال المتبادلة التي تتحقق بين الجسيمات، يمكن أن تؤدي إلى ارتباط الطاقة $E$ والزمن، حيث $E$ تعني هنا مجموع الطاقات السكونية والحركية، ولا تضم أو تشمل الطاقة الكامنة، ولهذا السبب تقتصر دراسة ميكانيك جملة الجسيمات بشكل فعلي على بعض الحالات البسيطة، كما هو موضح في هدف البحث.

## أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى دراسة:

I − جمل جسيمات غير متبادلة الأفعال(أي مستقلة).

II − جمل جسيمات واقعة على أبعاد كبيرة عن بعضها البعض ومتحركة بسرعات كبيرة جداً.

III − جمل جسيمات ذات أفعال كهرطيسية ضعيفة. هذا وسوف نخصص بحث مستقل لهذه الحالة.

## طرائق البحث ومواده

ففي النوع الأول من هذه الجمل(جمل الجسيمات غير متبادلة الأفعال) يكون للطاقة والاندفاع خواصاً جمعية منفصلة، حيث يكون،[1−2]:

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_i^2 / c^2)}} \qquad (1.2)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m\vec{\mathrm{v}}_i}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_i^2 / c^2)}} \qquad (1.3)$$

علماً أن $N$ عدد جسيمات الجملة، وأن الدليل $i$ يرمز لرقم الجسيم في الجملة المذكورة. وتكون هنا سرعات جميع الجسيمات ثابتة، وبالتالي تكون الطاقة الكلية وكذلك الاندفاع الكلي غير متغيرين بالنسبة للزمن. وتشكل $E$ و $\vec{P}$ معاً متجهة واحدة رباعية الأبعاد، ففي الواقع يكون عندئذٍ:

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_i^2 / c^2)}} = const_{(1)} \qquad (1.4)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{\mathrm{v}}_i}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_i^2 / c^2)}} = \overrightarrow{const}_{(2)} \qquad (1.5)$$

وباستخدام المتجهة رباعية الأبعاد، يكون:

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{N} P_\alpha^{(i)} \quad , \quad (\alpha = x_1, x_2, x_3, x_4 = ict) \qquad (1.6)$$

وكل حد من حدود المجموع في(1.6)، أي $P_\alpha^{(i)}$ هو متجهة رباعية الأبعاد طاقة واندفاع الجسيم المنفصل، الذي له الرقم $i$. قبل الانتقال إلى النتائج المستدرجة من هذا الوضع نوضح أن الخاصة(الصفة) الرئيسة للحالة الثانية من جمل الجسيمات، أي الجمل الواقعة على أبعاد كبيرة بعضها عن بعض، هي أنه يمكن الانتقال بهذا النوع من الجمل إلى حالة النوع الأول أي جمل الجسيمات غير متبادلة الأفعال. ففي حالة النوع الثاني من هذه الجمل تكون سرعات الجسيمات كبيرة، ومن مرتبة قريبة من سرعة الضوء، وبالتالي تكون طاقة الجسيم الواحد منها $E_i = \sum_{i=1}^{N} m_i c^2 / \sqrt{1-(\mathrm{v}_i^2/c^2)}$ كبيرة جداً مقارنة مع طاقة الفعل المتبادل على ابعاد كبيرة، لذلك يكون الوضع مثل وضع حالة الجسيمات الحرة، وتكون طاقة واندفاع هذه الجسيمات بالشكل نفسه المعطى في(1.4) و (1.5). أما عند اقتراب الجسيمات من بعضها(حيث يحدث التصادم غالباً)، فإن الأفعال المتبادلة لاتكون صغيرة، وتفقد العلاقات(1.4) و(1.5) صلاحيتهما في الاستخدام آنياً، لكنهما تعودان إلى هذه الصلاحية عندما تتباعد الجسيمات بعد التصادم إلى أبعاد كبيرة عن بعضها البعض. ومن الممكن ملاحظة أن الطاقة الكلية والاندفاع الكلي للجسيمات المتباعدة بعد التصادم لاتختلف عن قيمتيهما قبل التصادم، وبالتالي يمكن كتابة قانوني الانحفاظ بالشكل:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_i^2/c^2)}} = \sum_{k=1}^{N^*} \frac{m_k c^2}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_k^2/c^2)}} \qquad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{\mathrm{v}}_i}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_i^2/c^2)}} = \sum_{k=1}^{N^*} \frac{m_k \vec{\mathrm{v}}_k}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_k^2/c^2)}} \qquad (1.8)$$

علماً أن الدليلين $i$ و $k$ يرمزان للجسيمات قبل التصادم(الفعل المتبادل) وبعد، وأن النجمة الواقعة فوق المجموع من الجهة اليمنى تبين أن عدد جسيمات الجملة قبل التصادم وبعده، يمكن أن تختلفان بشكل عام. هذا وتشكل $E$ و $\vec{P}$ للجسيمات قبل التصادم وبعده متجهة رباعية الأبعاد للطاقة والاندفاع، وبالإمكان كتابة لاتغاير هذه المتجهة(invar.) رباعية الأبعاد للطاقة والاندفاع– كما نعلم في النظرية النسبية الخاصة– بالشكل:

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + P_{x_4}^2 = -M^2 c^2 \qquad (1.9)$$

وبالتالي:

$$I = P_\alpha^2 = \sum_\alpha \Big(\sum_i P_\alpha^{(i)}\Big)^2 = \text{invar.} = -M^2 \mathrm{c}^2 \qquad (1.10)$$

يؤكد هذا الثبات(أو اللاتغاير) هنا تحقق قانون انحفاظ الطاقة– الاندفاع. فمن أجل جسيم واحد يكون لدينا:

$$I = P_\alpha^2 = \frac{m^2}{1-(\mathrm{v}^2/c^2)}(\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2) - \frac{m^2 \mathrm{c}^2}{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} \qquad (1.11)$$

فإذا اخذنا بالحسبان $\vec{P} = \dfrac{m\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)}}$ و $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)}}$ فإنه يمكن معاودة كتابة(1.11) بالشكل:

$$I = (\vec{P})^2 - (E^2/c^2) = -m^2 c^2 \qquad (1.12)$$

وبتعميم(1.12) على مجموع الجسيمات قبل التصادم، وبعده، نجد أن:

$$(\vec{P})^2-(E^2/c^2)=-M^2c^2 \qquad (1.13)$$

$$(\vec{P}^*)^2-[(E^*)^2/c^2]=-M^{*2}c^2 \qquad (1.14)$$

وبالتالي:

$$(\vec{P})^2-(E^2/c^2)=(\vec{P}^*)^2-[(E^*)^2/c^2]=\text{invar.} \qquad (1.15)$$

علماً أن النجمة تدل على قيم المقادير الموافقة بعد حدوث الفعل المتبادل(التصادم).

من المعلوم في نظرية النسبية الخاصة، أن مركبات المتجهة رباعية الأبعاد $P_\alpha$، تتحول في أثناء الانتقال من جملة مقارنة عطالية $K'$ (الجملة الخاصة) إلى جملة مقارنة عطالية $K$ (الجملة المخبرية) باستخدام مصفوفة تحويلات لورنتز،[3−4]:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_{x4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} & 0 & 0 & -(i\mathrm{v}/c)/\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (i\mathrm{v}/c)/\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} & 0 & 0 & 1/\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ P'_{x4} \end{pmatrix} \qquad (1.16)$$

علماً أن $P_{x4}=iE/c$ و $P'_{x4}=iE'/c$. أما الانتقال المعاكس أي من الجملة $K$ إلى الجملة $K'$، فيتم الحصول عليه بإجراء التحويل المباشر ($\mathrm{v}\rightarrow -\mathrm{v}$)وباستبدال المقادير التي عليها فتحة بالمقادير نفسها لكن بدون فتحة، وبالعكس:

$$\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ P'_{x4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} & 0 & 0 & (i\mathrm{v}/c)/\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(i\mathrm{v}/c)/\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} & 0 & 0 & 1/\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_{x4} \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

وفي أثناء اجراء الحسابات اللازمة يكون من الملائم بهدف تبسيط الدراسة استخدام جملة احداثيات يكون فيها الاندفاع الكلي مساوياً الصفر. وهذه الجملة هي هنا كما هو عليه الحال، في الميكانيك التقليدي جملة مركز العطالة $K^{c.in}$.

لنفرض أن للجسيمات اندفاعاً وطاقة $\vec{P}$ و $E$ معينان في جملة المقارنة $K$، ولنعين سرعة حركة مركز العطالة $\mathrm{V}^{c.in}$ بالنسبة إلى هذه الجملة، وللتبسيط نفترض أولاً أن حركة جملة مركز العطالة تكون وفق المحور $ox$، نجد عندئذٍ باستخدام التحويلات(1.17)، أن $K$( الجملة المخبرية و $K'$ الجملة الخاصة):

$$P_x^{c.in}=0=\frac{P_x-(\mathrm{V}^{c.in}E/c^2)}{\sqrt{1-((\mathrm{V}^{c.in})^2/c^2)}} \qquad (1.18)$$

$$P_y^{c.in}=P_y=0=P_z^{c.in}=P_z=0 \qquad (1.19)$$

$$E^{c.in}=\frac{E-(\mathrm{V}^{c.in}P_x)}{\sqrt{1-((\mathrm{V}^{c.in})^2/c^2)}} \qquad (1.20)$$

علماً أن الدليل $c.in$ اختصاراً للكميات المحسوبة بالنسبة إلى جملة مركز العطالة. نلاحظ من(1.18)، أن:

$$\mathrm{V}^{c.in}=c^2P_x/E \qquad (1.21)$$

نحصل بالتعميم، عوضاً عن(1.21) على سرعة مركز العطالة:

$$\vec{V}^{c.in} = c^2\vec{P}/E \qquad (1.22)$$

هذا وخلافاً لما هو عليه الحال في الميكانيك التقليدي، لايمكن تعيين سرعة حركة مركز العطالة في الميكانيك النسبي على شاكلة المشتق بالنسبة للزمن لإحداثيات مركز العطالة:

$$\vec{V}^{c.in} \neq d\vec{R}^{c.in}/dt \qquad (1.23)$$

ففي الواقع لايمكن تعيين الكمية $c^2\vec{P}/E$ على شاكلة المشتق الزمني لكمية ما، ولذلك لايمكن تعيين مفهوم احداثي مركز عطالة جمل الجسيمات متبادلة الأفعال بشكل كيفي في الميكانيك النسبي. هذا وسوف نتناول بالدراسة في فقرة لاحقة حالة الأفعال المتبادلة الضعيفة لجسيمات الجملة، حيث يمكن عندئذٍ بتقريب معلوم استخدام مفهوم مركز العطالة.

لنبحث الآن في بعض خواص الكتلة السكونية لجملة الجسيمات. لتكن الجملة $K'$ جملة مركز العطالة(الجملة الخاصة). نكتب عندئذٍ لاتغاير (.invar) المتجهة رباعية الأبعاد للاندفاع والطاقة(1.13):

$$(\vec{P}^{c.in})^2c^2 - (E^{c.in})^2 = -M^2c^4 \qquad (1.24)$$

لكن ونظراً لأن $\vec{P}^{c.in} = 0$ في الجملة $K'$، فإن هذه العبارة(1.24) تؤول إلى الشكل الآتي في هذه الجملة:

$$E^{c.in} = Mc^2 \qquad (1.25)$$

حيث $M$ الكتلة السكونية. لكن ومن جهة أخرى وفاقاً للعبارة العامة(1.2)، فإن: $E^{c.in} = \sum m_i c^2/\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)}$ علماً أن $\vec{\mathrm{v}}_i$ هي هنا سرعة الجسيم $i$ بالنسبة إلى جملة مركز العطالة، وبالتالي نجد التعيين التالي للكتلة السكونية $M$:

$$M = \sum m_i/\sqrt{1-(\mathrm{v}_i^2/c^2)} \qquad (1.26)$$

ومن ذلك نرى أن الكتلة السكونية للجملة $M$ لاتساوي مجموع الكتل السكونية للجسيمات: المنفصلة $\sum m_i$، بل وتتعلق كذلك بسرعات جسيمات هذه الجملة بالنسبة إلى جملة مركز العطالة.

لنتأمل مثلاً حالة جملة جسيمات غاز مثالي: فالغاز المثالي يحقق- كما يبدو بوضوح- ماهو مطلوب من خواص للأفعال المتبادلة بين الجسيمات، والتي تكلمنا عنه أعلاه، وتكون الكتلة الكلية السكونية عندئذٍ للغاز $M$ مرتبطة وفاقاً لِ (1.24) بالحركة الداخلية لجزيئاته، وما يقابل ذلك من ارتباط بدرجة الحرارة.

إن للفرق بين الكتلة السكونية $M$ ومجموع كتل الجسيمات المؤلفة لها $\sum_i m_i$ أهمية كبيرة في الظواهر التي تحدث في الطبيعة، وبخاصة في الفيزياء النووية، ومنها تفاعلات التفكك والاندماج وتوازن نوى الذرات، والطاقة الناتجة عن التفاعلات النووية، وتفكك الجسيمات الأولية، وتشكل الأزواج الكترونات- بوزيترونات وغير ذلك. وفي الحالة العامة، في حالة الجسيمات ذات الأفعال المتبادلة الكيفية، فإن العبارة(1.2)، لاتعين الطاقة الكلية للجملة، بل تعين مجموع الطاقات السكونية والطاقات الحركية للجسيمات المؤلفة للجملة فقط.

إن تعيين الطاقة الكلية يتطلب الأخذ بالحسبان طاقات الأفعال المتبادلة بين الجسيمات. لكن الميكانيك النسبي لايعالج مسألة الطاقة الكامنة للأفعال المتبادلة بيت جسيمات الجملة. فالطاقة الكامنة للأفعال المتبادلة بين الجسيمات تتعلق بمواضع هذه الجسيمات بالنسبة إلى بعضها البعض فقط. فإذا تغير موضع جسيم ما من هذه الجسيمات، يجب ان يرافق تغيراً لحظياً(أو آنياً) للطاقة الكامنة، والقوى المؤثرة على الجسيمات المنفصلة. بكلام آخر: إن مفهوم الطاقة الكامنة للأفعال المتبادلة بين الجسيمات يرتبط ارتباطاً مباشراً بالتأثير عن بُعد، وهذا مالا يمكن

استخدامه في نظرية النسبية الخاصة. ولذلك لايمكن في الحالة العامة كتابة صيغة طاقة الأفعال المتبادلة، وينطبق ذلك على الاندفاع لكونه في نظرية النسبية الخاصة غير مستقل، بل يرتبط بالطاقة.

وخلافاً لجمل الأفعال المتبادلة من جراء التصادمات، يمكن تعيين صيغ تقريبية للأفعال المتبادلة بين الجسيمات المشحونة، وهذا ماسوف نعالجه في الفقرة التالية.

## 2- تصادم الجسيمات النسبوية- مفعول كومبتون،[4-7]

تحظى نظرية تصادم الجسيمات النسبوية باهتمام كبير في الفيزياء النووية. ففي حالة عدم حدوث تفاعلات نووية بين الجسيمات المتصادمة، فإن الأفعال المتبادلة بينها يمكن عدها(اعتبارها)- حتى درجة كافية من الدقة- بمثابة تصادمات مرنة(أي تصادمات تحدث دون تغير في البنية الداخلية لنوى الجسيمات المتصادمة)، وينتمي- بشكل عام- تصادم الميزونات والبروتونات أو الفوتونات مع الالكترونات إلى هذا النوع من تصادم الجسيمات الأولية.

لنتتبع اولاً تصادماً مرناً لجسمين لهما كتلتان سكونيتان مختلفتان عن الصفر: نفترض أن جسيماً سريعاً كتلته $\mu$ واندفاعه $\vec{P}$ اصطدم بجسيم آخر ساكن وحر، وله كتلة تساوي $m$، ويكون هذا الافتراض افتراضاً قانونياً عندما تكون سرعة الجسيم الساقط سرعة كبيرة بشكل كاف، ونفترض أن الجسيم المقذوف(الذي كان ساكناً) تحرك من جراء سقوط الجسيم الآخر عليه، باندفاع يساوي $\vec{P}_1$، بحيث يصنع هذا الاندفاع زاوية $\phi$ مع اندفاع الجسم الساقط(القاذف). أما بالنسبة للجسم الساقط(القاذف)، فإنه قد انحاد عن اتجاهه الأصلي بعد التصادم، بزاوية تساوي $\theta$، فأصبح له اندفاعاً يساوي $\vec{P}_2$. نكتب عندئذٍ قانون انحفاظ الطاقة والاندفاع(1.7) و(1.8):

$$mc^2+E=E_1+E_2 \qquad (2.1)$$

$$\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2 \qquad (2.2)$$

علماً أن $E$ و $E_2$ هما طاقة الجسم الساقط(القاذف) قبل التصادم وبعده، أما $E_1$ فهي طاقة الجسم الذي كان ساكناً، والذي له كتلة تساوي $m$، أو بكلام آخر طاقة الجسم المقذوف بعد أن تم قذفه. وتعد هاتين العبارتين(2.1) و(2.2) كافيتين من أجل تعيين جميع المقادير التي تعين التصادم الحاصل. لنعين أولاً الطاقة التي يكتسبها الجسم الساكن(المقذوف) $E_1$، تبعاً لزاوية حركته الحاصلة. من الأفضل عندئذٍ عدم تعيين الطاقة الكلية $E_1$ أولاً، بل تعيين طاقته الحركية $E_1^{(kin)}$، حيث: $E_1^{(kin)}=E_1-mc^2$، فمن(2.1)، نلاحظ أن:

$$E=E_1+E_2-mc^2=E_2+E_1^{(kin)} \qquad (2.3)$$

فإذا أخذنا بالحسبان أن تابع هاملتون $H$ يأخذ في نظرية النسبية الخاصة، عندما $U(r)=0$، الشكل: $H=E=\sqrt{P^2c^2+\mu^2c^4}$ وبالتالي يمكن معاودة كتابة(2.3) بالشكل:

$$\sqrt{P^2c^2+\mu^2c^4}=\sqrt{P_2^2c^2+\mu^2c^4}+E_1^{(kin)} \qquad (2.4)$$

وتأسيساً على العلاقة(2.2)، نلاحظ أن:

$$(\vec{P}_2)^2=(\vec{P}-\vec{P}_1)^2=p^2+P_1^2-2PP_1\cos\varphi \qquad (2.5)$$

وباستخدام(2.4) و(2.5) يمكن التخلص من $P_2$، وزيادة على ذلك يمكن معاودة صياغة $P_1^2$ بدلالة $E_1^{(kin)}$، وذلك باستخدام(2.3)، بالشكل: $E_1=E_1^{(kin)}+mc^2=\sqrt{P_1^2c^2+m^2c^4}$

أو بالتالي، بحمل هذه العبارة إلى التربيع، نجد أن:

$$E_1^{2\,(kin)}+2mc^2E_1^{(kin)}+m^2c^4=P_1^2c^2+m^2c^4 \qquad (2.6)$$

لنحمل العبارة(2.4) إلى التربيع، ولنبدل $P_2^2$ بقيمتها محسوبة من(2.5)، فنجد بعد اجراء حسابات بسيطة أن: $PP_1c^2\cos\varphi = E_1^{(kin)}[\sqrt{P^2c^2+\mu^2c^4}+mc^2]$، وبحمل هذه العبارة الأخيرة إلى التربيع، وتعيين $P_1^2c^2$ بدلالة $E_1^{(kin)}$ من جديد وذلك باستخدام(2.6)، نحصل:

$$E_1^{(kin)} = 2mc^4P^2\cos^2\varphi / \{[\sqrt{P^2c^2+\mu^2c^4}+mc^2]^2 + -(P^2c^2\cos^2\varphi)\} \qquad (2.7)$$

وهذه العبارة هي التي نبحث عنها، والتي تعين الطاقة الحركية التي يكتسبها الجسيم المقذوف(الذي كان ساكناً) لكل من $P$ و $\varphi$ و $m$ و $\mu$. تبين العبارة(2.7) أن القيمة العظمى للطاقة الحركية المكتسبة، توافق الحالة $\varphi = 0$، أي الحالة التي يتحرك فيها الجسيم المقذوف(الذي كان ساكناً قبل قذفه) بعد أن تم قذفه في الاتجاه نفسه الذي كان قد ورد فيه الجسيم القاذف "أي حالة التصادم الجبهوي" حيث يكون عندئذٍ:

$$(E_1^{(kin)})_{\max} = (2mc^2)P^2c^2 / \{[\sqrt{P^2c^2+\mu^2c^4}+mc^2]^2 - P^2c^2\} \qquad (2.8)$$

لنتتبع بعض الحالات الخاصة، التي تتضمنها العبارة(2.8): لنفترض اولاً أن الجسيم الساقط(القاذف) هو بروتوناً أو ميزوناً، وأن الجسيم الساكن(المقذوف) هو الكتروناً، تكون عندئذٍ $m \ll \mu$، وزيادة على ذلك نفترض أن الجسيم القاذف يتحرك بسرعة كبيرة جداً، بحيث يكون $Pc \gg \mu c^2$، نجد عندئذٍ من العبارة(2.8) أن:

$$\begin{aligned}(E_1^{(kin)})_{\max} &= (2mc^2)P^2c^2 / [P^2c^2+\mu^2c^4+m^2c^4 + \\ &+ 2mc^2Pc\sqrt{1+(\mu^2c^4/P^2c^2)} - P^2c^2] \\ &\approx (2mc^2)P^2c^2 / \mu^2c^4 + 2mc^2Pc\end{aligned}$$

فإذا كان اندفاع الجسيم الساقط كبير بالشكل الذي يتحقق فيه: $Pc \gg \mu^2c^4/2mc^2 = (\mu/m)\mu c^2$ فإن الطاقة الحركية العظمى $(E_1^{(kin)})_{\max}$ المكتسبة تصل إلى القيمة:

$$(E_1^{(kin)})_{\max} \cong Pc \simeq E \qquad (2.9)$$

أي أنها تكون عندئذٍ مساوية طاقة الجسيم الساقط. لنبحث الآن في الحالة المعاكسة: أي الحالة التي يكون فيها الجسيم الساقط(القاذف) خفيفاً كأن يكون مثلاً إلكتروناً، أما الجسيم المقذوف فنفترض أن له كتلة كبيرة(أي الحالة $\mu \ll m$). وزيادة على ذلك نفترض أن اندفاع الجسيم الساقط كبيراً $Pc \gg \mu c^2$، نحصل عندئذٍ من(2.8) على الطاقة الحركية التي يكتسبها الجسيم المقذوف: $(E_1^{(kin)})_{\max} \approx (2mc^2)P^2c^2/m^2c^4 + 2mc^2Pc$فإذا كان اندفاع الجسيم الساقط(القاذف) $Pc \gg mc^2/2$، فإن:

$$(E_1^{(kin)})_{\max} \simeq Pc \approx E \qquad (2.10)$$

يتضح لنا من ذلك أنه في حالة الاندفاعات الكبيرة يكون الاختلاف بين قانون التصادمات المرنة في الميكانيك النسبي وبين قانون التصادمات المرنة في الميكانيك التقليدي اختلافاً ملموساً، حيث يكون انتقال الطاقة الكلية من الجسيمات الخفيفة إلى الجسيمات الثقيلة أو من الجسيمات الثقيلة إلى الجسيمات الخفيفة انتقالاً متساوياً في الميكانيك النسبي(2.10) و(2.9)، في حين يرافق التصادمات في الميكانيك التقليدي انتقالاً محدوداً فقط للطاقة. اما في الحالات الحدية الأخرى، فإن بالإمكان البرهان– دون أية صعوبة– على أنه عندما تكون الاندفاعات صغيرة $Pc \ll \mu c^2$ و $Pc \ll mc^2$ تكون الطاقة المنتقلة(المكتسبة) معطاة بعلاقات متطابقة مع العلاقات الموافقة نظرية التصادمات المرنة التقليدية.

توجد حالة هامة للتصادمات المرنة، وهي تصادم الفوتون مع الالكترون، وتحمل هذه الحالة(أو الظاهرة) اسم مفعول كومبتون. وقد ارتبطت دراسة هذه الحالة بتفسير الطبيعة الكمومية للضوء. هذا ويلعب مفعول كومبتون دوراً مميزاً في سلسلة من المسائل التطبيقية الحديثة، المرتبطة وبخاصة في الفيزياء النووية: فمن المعلوم أن الكتلة السكونية للفوتون تساوي الصفر $\mu = 0$ وأن $E = Pc$ و $E_2 = P_2 c$، وبالتالي تأخذ العبارتان(2.1) و(2.2) الشكل:

$$E_2 = E_2 + E_1^{(kin)} \qquad (2.11)$$

$$P_1^2 = P^2 + P_2^2 - 2PP_2 \cos\theta \qquad (2.12)$$

أو:

$$P_1^2 = E^2 / c^2 + E_2^2 / c^2 - 2(EE_2 / c^2)\cos\theta \qquad (2.13)$$

علماً أن الطاقة الكلية للإلكترون $\sqrt{P_1^2 c^2 + m_e^2 c^4}$، تساوي مجموع طاقتيه: الحركية $E_1^{(kin)}$ مضافاً إليها طاقته السكونية $m_e c^2$، أي أن:

$$E_1^{(kin)} = \sqrt{P_1^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 \qquad (2.14)$$

وأن $\theta$ الزاوية الكائنة بين اتجاهي حركة الفوتون قبل التصادم وبعده. لنضع قيمة $P_1^2 c^2$ بدلالة الطاقة الحركية للإلكترون والتي يتم حسابها من(2.13) في العبارة(2.12)، فنجد، وفق(2.14) و(2.13)، أن:

$$P_1^2 c^2 = E_1^{2\,(kin)} + 2m_e c^2 E_1^{(kin)} = E^2 + E_2^2 - 2EE_2 \cos\theta \qquad (2.15)$$

ولحساب طاقة الفوتون بعد تصادمه مع الالكترون $E_2$، نتخلص من $E_1^{(kin)}$ في (2.11) و(2.15)، فنجد:

$$E_2 = m_e c^2 E / [m_e c^2 + E(1 - \cos\theta)] \qquad (2.16)$$

وتربط هذه العبارة طاقة الفوتون المتشتت $E_2$ مع طاقة الفوتون قبل التصادم $E$، ومع زاوية تشتته $\theta$. وبالانتقال من الطاقة إلى طول الموجة الموافقة، وفاقاً للعبارة الكمومية الشهيرة للفوتون $E = h\nu = hc/\lambda$ (علاقة أينشتاين)، يمكن تعيين مقدار تغير طول الموجة في أثناء حدوث تشتت كومبتون $\Delta\lambda$، وفق(2.16):

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda = hc[(1/E_2) - (1/E)] = (h / m_e c)(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\lambda = ƛ(1 - \cos\theta) \qquad (2.17)$$

علماً أن: $ƛ = h / m_e c = 6.6\times10^{-34} / 9.1\times10^{-31} \times 3\times10^{8} = 0.24\times10^{-11} m = 0.024 A^\circ$ وهو مايسمى بطول موجة كومبتون. توضح العبارة(2.17) أن تغير طول موجة الفوتون $\Delta\lambda$ في أثناء حدوث التشتت، يتم بشكل مستقل عن طول موجة الاشعاع الساقط، وأن التغير الأعظم لهذا الطول هو $\Delta\lambda = 2ƛ$. وبمعرفة طاقة تشتت الفوتون، يمكن بسهولة إيجاد(تعيين) الطاقة التي يعطيها الالكترون، بعد أن يتصادم معه، فهي تساوي وفق(2.11) و(2.16):

$$E_1^{(kin)} = E - E_2 = E^2 (1 - \cos\theta) / [m_e c^2 + E(1 - \cos\theta)]$$
$$= \{ƛ(1 - \cos\theta) / [\lambda + ƛ(1 - \cos\theta)]\} E$$

ولا تكون هذه الطاقة كبيرة نسبياً عندما يكون $\lambda \,\square\, ƛ$، وعلى العكس تكون هذه الطاقة، التي يكتسبها الالكترون ذات قيمة ملموسة، ومن مرتبة $E$ عندما يكون $\lambda \,\square\, ƛ$. تكمن أهمية هذه النتيجة في الغالب بكونها تتمتع بخواص عامة. فمن المعلوم أن الالكتروديناميك التقليدي محدود الصلاحية في الاستخدام، فلا يصح تطبيقه نظرياً في المجالات التي تكون أبعادها صغيرة، ومن مرتبة نصف القطر التقليدي للالكترون $r_0 \,\square\, 2.8\times10^{-15} m = 0.028\times10^{-3} A^\circ$.

لكن في الواقع تكون الحدود الفعلية لصلاحية استخدامه أكبر من ذلك، فهي من مرتبة طول موجة كومبتون $r \sim 0.024A^{\circ}$ .

إن عدم صلاحية استخدام الالكتروديناميك التقليدي في دراسة الظواهر، التي تجري في المناطق من الفراغ، التي هي من مرتبة طول موجة كومبتون $\lambda\!\!\!^{-}$، ترتبط بأن المفاعيل الكمومية تظهر عند هذه الأبعاد، والمثال الأكثر وضوحاً في هذه المسألة هو تشتت(تبدد) الضوء. فعندما يكون $\lambda > \lambda\!\!\!^{-}$، يكون تغير طول موجة الضوء المتشتت والطاقة التي يأخذها(يكتسبها) الالكترون الحر صغيران نسبياً، لذلك يمكن عندئذٍ وبشكل جيد دراسة تشتت الضوء وفاقاً للنظرية التقليدية. إن للتشتت خواص مميزة، فإذا كان تغير طول الموجة $\Delta\lambda \ll \lambda\!\!\!^{-}$ صغيراً بشكل كبير بالمقارنة مع طول الموجة، فلا يوجد انتقال(إعطاء) أية طاقة للإلكترون الحر، ويحسب عندئذٍ مقطع التشتت في هذه الحالة بعلاقة تومسون في التشتت، والمعروفة بشكل جيد في الالكتروديناميك التقليدي. ومع اقتراب $\lambda$ من $\lambda\!\!\!^{-}$ (الانتقال صوب الأشعة السينية وأشعة غاما)، يحل مفعول كومبتون محل التشتت التقليدي، ويغدو تغير طول موجة الضوء ملموساً بالمقارنة مع طول موجة اشعاع الالكترون، المطرود من مكانه، والمتحرك على الأغلب نحو الأمام في اتجاه حركة الفوتون الساقط عليه.

## 3- حالة جمل الجسيمات المشحونة ضعيفة الفعل المتبادل

من المعلوم أنه لايمكن استخلاص الطاقة الكامنة للأفعال المتبادلة في نظرية النسبية الخاصة عندما تكون الجمل متبادلة الأفعال، لأن الفعل المتبادل المتأخر لايتعلق بمواضع(أمكنة) الجسيمات في اللحظة الزمانية الحالية فقط، بل ويتعلق كذلك بحركات(مواضع) هذه الجسيمات في اللحظات الزمانية السابقة. اضافة إلى ذلك فإن هذه الجسيمات تشع في أثناء تسارعها، ويتم خروج جزء من طاقتها إلى خارج الجملة، فالجمل لاتكون بشكل اجمالي جملاً محافظة. لكن على الرغم من ذلك يبدو أنه إذا كانت حركة الجسيمات تتم ببطء ملموس، بحيث أن $\mathrm{v} \ll c$، فإنه وبتقريب مقبول يمكن استخدام مفهوم الفعل المتبادل بين جسيمات الجملة، وهذا الفعل يتعلق بالأبعاد بين الجسيمات، وهذا مايسمح بدوره بتعيين حالة جملة الجسيمات المتحركة باستخدام الكميات الميكانيكية، واعتبار أن حركة جملة الجسيمات مرتبطة بشكل غير مباشر بحالة الحقل الكهرطيسي، ودراسة هذه الحركة وفاقاً لقوانين الميكانيك. في الواقع، إذا كان الجسيم متحركاً بسرعة صغيرة نسبياً، بحيث يمكن اهمال التأخر الخاص $|\vec{r}'|/c$ بشكل تام، كان بالإمكان صياغة الفعل المتبادل بالعبارة الكهراساكنة الآتية:

$$U = (1/4\pi\varepsilon_0)\sum_{k>i}(e_i \cdot e_k)/r_{ik} \tag{3.1}$$

علماً أن $r_{ik}$ هو البعد الثابت بين الشحنتين $i$ و $k$. فمن اجل شحنة ما اختيارية $k$ مثلاً، نكتب تابع لاغرانج:

$$L_k = (m_k \mathrm{v}_k^2 / 2) - e_k \varphi_k \tag{3.2}$$

علماً أن $\varphi_k$ هو الكمون المؤثر على الشحنة $k$. ونحصل على تابع لاغرانج لجملة الشحنات بإجراء الجمع:

$$L = \sum_k L_k = \sum_k [(m_k \mathrm{v}_k^2 / 2) - e_k \varphi_k] \tag{3.3}$$

وبمعرفة تابع لاغرانج يمكن تعيين قانون حركة الجملة. وتؤكد الحسابات اللاحقة، أنه في حالة التقريبات المتتالية تبعاً لِـ $(\mathrm{v}/c)$، وحتى حدود المرتبة الثانية $(\mathrm{v}/c)^2$ يمكن تعيين تابع لاغرانج للجملة، وهذا مايسمح بدوره من التأكد من أن المسالة الراهنة يمكن حلها بدقة بالدراسة الميكانيكية لحركات الجسيمات. لكن إذا كان ليس بالإمكان اهمال الكميات من المرتبة الثالثة $(\mathrm{v}/c)^3$، فإن حل هذه المسألة بالطرائق الميكانيكية يغدو غير ممكن بشكل

عام، حيث من المعلوم أن شدة اشعاع ثنائي القطب تعين بكمية من المرتبة $(1/c)^3$ كما نعلم في الالكتروديناميك التقليدي. ولذلك فإن الاحتفاظ بالحدود من مراتب أعلى من $(\mathrm{v}/c)^2$ يوافق الأخذ بالحسبان تشكل ثنائيات الأقطاب، وهذا مايجعل الدراسة(المعالجة)باستخدام الطرق الميكانيكية لحالات الجمل غير قانونية. وفي الجمل التي لايوجد فيها اشعاع ثنائيات أقطاب يمكن نشر الكمون في مراتب متتالية. لنكتب تابع لاغرانج للجسيم رقم $k$ في النسبية الخاصة مع الأخذ بالحسبان حركات الشحنات الأخرى في الجملة[3−4]،[8]:

$$L_k = -m_k c^2 \sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} - e_k \varphi_k + e_k (\vec{\mathrm{v}}_k \cdot \vec{A}_k) \qquad (3.4)$$

علماً أن $(\varphi_k, \vec{A}_k)$ الكمون الكهرطيسي في النقطة التي تقع فيها الشحنة رقم $k$. وبالإمكان كتابة هذين الكمونين عند الأخذ بالحسبان أن سرعة انتشار الفعل المتبادل محدود، على شاكلة كمون كهرطيسي متأخر،[9−10] :

$$\varphi(\vec{r}_k, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|} dV'$$

و:

$$\vec{A}(\vec{r}_k, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|} dV'$$

فإذا كانت الحركة بطيئة $\mathrm{v} \ll c$ ، يمكن نشر كثافتي الشحنة $\rho(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|}{c})$ و $\vec{J}(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|}{c})$ في سلسلة تبعاً لدرجة التأخر الزماني، حيث نفترض أن النقطة $\vec{r}_k$ واقعة على حدود الجملة المدروسة، وبالتالي لايجوز هنا تقسيم الزمن الكلي للتأخر إلى زمن تأخر خاص وزمن تأخر عام، بل يتم النشر تبعاً للزمن الكلي للتأخر، الذي نرمز له بالرمز $\tau = \frac{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|}{c}$ ويكون عندئذٍ:

$$\rho(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|}{c}) \approx \rho(\vec{r}\,', t) - \frac{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|}{c} \cdot \frac{\partial(\vec{r}\,', t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \rho(\vec{r}\,', t)}{\partial t^2}$$

و:

$$\vec{J}(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|}{c}) \approx \vec{J}(\vec{r}\,', t) + \cdots$$

وبالتالي يكون:

$$\varphi(\vec{r}_k, t) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,', t)}{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|} dV' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho(\vec{r}\,', t) dV' + $$
$$+ \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint |\vec{r}_k - \vec{r}\,'| \rho(\vec{r}\,', t) dV'$$

حيث يكون بالإمكان هنا اجراء تبادل بين موضعي التفاضل بالنسبة للزمن، والتكامل بالنسبة للحجم الذي يشغله توزع كثافة الشحنة أو كثافة التيار وذلك لأن $\vec{r}_k$ مثبتة هنا(أي غير تابعة للزمن) أما $\vec{r}\,'$ فهي مجموع(تراكيب) ثلاثة متحولات مستقلة. نظراً لأن التكامل في الحد الثاني من هذه العبارة يتم في اللحظة الزمانية $t$، فإن هذا الحد يمثل(يعين) الشحنة الكلية للجملة $e$، ونظراً لكون هذه الشحنة ثابتة، فإن:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho(\vec{r}\,', t) dV' = \frac{\partial}{\partial t}(e) = 0$$

ونحصل على:

$$\varphi(\vec{r}_k, t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,', t)}{|\vec{r}_k - \vec{r}\,'|} dV' + \frac{1}{2c^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint |\vec{r}_k - \vec{r}\,'| \rho(\vec{r}\,', t) dV' \qquad (3.5)$$

و:

$$\vec{A}(\vec{r}_k,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}_k-\vec{r}'|}dV' \tag{3.6}$$

هذا وتغدو الحسابات اللاحقة أكثر وضوحاً فيما لو تم استخدام الشحنات النقطية، حيث يكون عندئذٍ:

$$\rho(\vec{r}',t) = \sum\nolimits_i^{'} e_i\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_i(t)) \tag{3.7}$$

وتعني الفتحة أمام الطرف العلوي الأيمن للمجموع أن هذا المجموع لايحتوي على الحد $i=k$. سوف لن نكتب هذه الفتحة لاحقاً، حتى لانكثر من الرموز والأدلة المستخدمة. لكن يجب الانتباه إلى ذلك. وبوضع(3.7) في(3.5) وباستخدام خواص تابع دلتا لديراك، نجد بعد اجراء المكاملة، أن:

$$\varphi(\vec{r}_k,t) = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{e_i}{|\vec{r}_k-\vec{r}_i(t)|} + \frac{1}{8\pi c^2\varepsilon_0}\sum_i e_i\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\vec{r}_k-\vec{r}_i(t)| \tag{3.8}$$

حيث تم الأخذ بالحسبان هنا أنه بنتيجة المكاملة لايظهر تابع دلتا لديراك، بل يظهر $\vec{r}_i(t)$ للشحنة رقم $i$ بدلاً من $\vec{r}'$ في الصيغ الموافقة، وهو تابع بشكل صريح للزمن، ولذلك يبقى بعد اجراء المكاملة بالنسبة لِ $\vec{r}'$ التفاضل بالنسبة للزمن، وبشكل مشابه(3.7) نكتب كثافة التيار:

$$\vec{J}(\vec{r}',t) = \sum_i^{'} e_i\,\vec{\mathrm{v}}_i\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_i(t)) \tag{3.9}$$

تؤول عندئذٍ العبارة(3.6) إلى الشكل التالي:

$$\vec{A} = \sum_i A_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i \frac{e_i\,\vec{\mathrm{v}}_i}{|\vec{r}_k-\vec{r}(t)_i|} \tag{3.10}$$

حيث $(\varphi_i,\vec{A}_i)$، الكمون الكهرطيسي الناتج في اللحظة $t$ في النقطة $\vec{r}_k$ بفعل الشحنة $i$. هذا وتحتوي العبارة(3.8) للكمون السلمي- مع الأخذ بالحسبان التأخر الحاصل(الحد الثاني)- على المشتق الثاني للمتجهة $\vec{r}_i(t)$ بالنسبة للزمن، أي على تسارع الشحنة رقم $i$، الذي يسبب بدوره الحقل في النقطة $\vec{r}_k$. لكن يجب أن لايحتوي تابع لاغرانج- كما نعلم- إلا على الاحداثيات والسرعات، ولذلك يكون من الملائم الانتقال إلى مايسمى بالتحويلات المعيارية(القياسية) للكمون الكهرطيسي،[10-12]، وهذه التحويلات لاتؤثر في شيء على تعيين الكمون الكهرطيسي، وفي هذه التحويلات لايظهر في الكمون السلمي الحد الثاني(أي لايحتوي هذا الكمون عندئذٍ على المشتق الثاني للإحداثيات بالنسبة للزمن(أو التسارع)):

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}_i' &\to \vec{A}_i + \vec{\nabla}\psi_i \quad \Rightarrow \quad \vec{A}_i \to \vec{A}_i' - \vec{\nabla}\psi_i \\ \varphi_i' &\to \varphi_i - \frac{\partial\psi_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \varphi_i \to \varphi_i' + \frac{\partial\psi_i}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

علماً أن $\psi_i$ حقل سلمي للشحنة رقم $i$، ويعين بالشكل:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{e_i}{8\pi c^2\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}|\vec{r}_k-\vec{r}_i(t)| = \frac{e_i}{8\pi c^2\varepsilon_0}\frac{\partial|\vec{r}_k-\vec{r}_i(t)|}{\partial(\vec{r}_k-\vec{r}_i(t))}\frac{\partial(\vec{r}_k-\vec{r}_i(t))}{\partial t} \\ &= \frac{e_i}{8\pi c^2\varepsilon_0}\left[\frac{(\vec{r}_k-\vec{r}_i(t))\vec{\mathrm{v}}_i}{|\vec{r}_k-\vec{r}_i(t)|}\right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

وبالتالي:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_i = \frac{e_i}{8\pi c^2\varepsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\vec{r}_k - \vec{r}_i(t)| \qquad (3.13)$$

وباستخدام التحويلات المعيارية: $\varphi_i' \to \varphi_i - \dfrac{\partial \psi_i}{\partial t}$، المعينة في(3.11) بعد تعويض قيمة $\varphi_i$ المعينة في (3.8) و $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial t}$ المعينة في (3.2) فيه(أي في التحويلات المعيارية السابقة)، نجد أن:

$$\varphi' = \sum_i \varphi_i' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{e_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i(t)|} \qquad (3.14)$$

حيث تم اعتبار موضع نقطة المراقبة $\vec{r}_k$ في أثناء المفاضلة ثابت بالنسبة للزمن. وأما التدرج فهو مقدار متجه، يتجه من موضع وجود الشحنة رقم $i$ إلى نقطة المراقبة، وأن $\vec{\mathrm{v}}_i$ تعني سرعة الجسيم رقم $i$ في اللحظة $t$. وبشكل مشابه، وبالعودة إلى(3.10) و(3.11) و(3.12)، نجد العبارة الآتية من أجل $\vec{A}_i'$:

$$\vec{A}_i' = \vec{A}_i + \vec{\nabla}\psi_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i(t)|} + \frac{e_i}{8\pi c^2\varepsilon_0}\vec{\nabla}[\frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_i(t))\vec{\mathrm{v}}_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i(t)|}]$$

فإذا أخذنا بالحسبان أن:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_i(t))\cdot\vec{a}}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i(t)|} &= \overrightarrow{grad}_{r_i}\frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_i(t))\cdot\vec{a}}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i(t)|} = \\ &= -\frac{a_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} - \frac{((\vec{r}_k - \vec{r}_i(t))\cdot\vec{a})\cdot(\partial/\partial t)|\vec{r}_k - \vec{r}_i(t)|}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i(t)|^2} \\ &= -\frac{a_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} + \frac{((\vec{r}_k - \vec{r}_i(t))\cdot\vec{a})(\vec{r}_k - \vec{r}_i(t))}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i(t)|^3}\end{aligned}$$

علماً أن $\vec{a}_i$ متجهة ثابتة. وبالتالي نجد أن:

$$\vec{\nabla}[\frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_i(t))\vec{\mathrm{v}}_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i(t)|}] = -\frac{\vec{\mathrm{v}}_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} + \frac{((\vec{r}_k - \vec{r}_i(t))\cdot\vec{\mathrm{v}}_i)(\vec{r}_k - \vec{r}_i(t))}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i(t)|^3} \qquad (3.15)$$

وتأسيساً على ذلك نلاحظ أن بالإمكان الحصول على العبارة الآتية للكمون المتجه $\vec{A}'$، المعين في التحويلات المعيارية(3.11) بعد أن نضع فيها(3.10) و(3.15):

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \sum_i \vec{A}_i' = \sum_i \vec{A}_i + \sum_i \vec{\nabla}\psi_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i \frac{\mathrm{e}_i\vec{\mathrm{v}}_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} - \\ &- \frac{1}{8\pi c^2\varepsilon_0}\{\sum_i \frac{\mathrm{e}_i\vec{\mathrm{v}}_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} - \sum_i e_i\frac{((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\cdot\vec{\mathrm{v}}_i)(\vec{r}_k - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|^3}\}\end{aligned} \qquad (3.16)$$

ويجب بعدئذٍ وضع هاتين العبارتين(3.14) و(3.16) للكمون الكهرطيسي $(\varphi', \vec{A}')$ في عبارة تابع لاغرانج (3.4) للجسيم رقم $k$. في الواقع يمكن نشر الحد الأول من هذا التابع في سلسلة، والاكتفاء بحدود النشر حتى المرتبة الثانية من الصغر: $(\mathrm{v}/c)^2$. لما يحتويه كل من الكمونين $\varphi'$ و $\vec{A}'$ المعينين في(3.14) و(3.16):

$$\begin{aligned}L_k &= -m_k c^2\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} - e_k\varphi_k + (\vec{\mathrm{v}}_k\cdot\vec{A}_k) = \\ &= -m_k c^2 + \frac{m_k \mathrm{v}_k^2}{c^2} + \frac{1}{8}\frac{m_k \mathrm{v}_k^4}{c^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{e_i e_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} + \\ &- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\{\frac{e_i e_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} - \frac{1}{2c^2}\frac{e_i e_k \vec{\mathrm{v}}_i\cdot\vec{\mathrm{v}}_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} - \frac{e_i e_k}{2c}\frac{((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_i)((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_k)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|^3}\}\end{aligned} \qquad (3.17)$$

إن الحد الأول من تابع لاغرانج $L_k$ يخص الجسيم الساكن، أما الحد الثاني فيحمل معنى الطاقة الحركية في تقريب الميكانيك التقليدي. أما الحد الثالث فيمثل التصحيح النسبي للطاقة الحركية. وأخيراً فإن الحد الواقع ضمن القوس الكبيرة، فإنه يتعلق بالمواضع اللحظية للجسيمات وبسرعاتها، ومن الملاحظ أن الكمية:

$$U_{ik} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{e_i e_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} - \frac{1}{2c^2}\frac{e_i e_k \vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} - \frac{e_i e_k}{2c^2}\frac{((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_i)((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_k)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|^3}\} \quad (3.18)$$

التي تتعلق بالبعد بين الجسمين $i$ و $k$ في لحظة زمانية معينة، تمثل تعميماً لطاقة الفعل المتبادل بين الجسيمات. فالحد الأول يحمل- كما يبدو بوضوح- معنى الطاقة الكامنة للجسيمين $i$ و $k$ الساكنين. اما الحدان الأخيران المتناسبان مع $(\vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_k / c^2)$ فهما بمثابة تصحيح لطاقة الفعل المتبادل للشحنات المتحركة ولمفعول التأخر الحاصل، وليس له معنى الطاقة الكامنة، التي تتعلق بالموضع فقط. وتعد العبارة(3.18) عبارة متناظرة بشكل تام بالنسبة إلى كل من الشحنتين $i$ و $k$، ولذلك من السهولة بمكان تعيين تابع لاغرانج لجملة الجسيمات:

$$\begin{aligned} L = & \sum_k \{-m_k c^2 + \frac{1}{2}m_k \mathrm{v}_k^2 + \frac{1}{8c^2}m_k \mathrm{v}_k^4\} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k>i}\{\frac{e_i e_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} + \\ & - \frac{e_i e_k}{2c^2}\frac{(\vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_k)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} - \frac{e_i e_k}{2c^2}\frac{((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_i)((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_k)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|^3}\} = L_0 + L_1 + L_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

حيث أن:

$$L_0 = -\sum_k m_k c^2 \quad (3.20)$$

علماً أن $L_1$ تابع لاغرانج لجملة الشحنات عند إهمال كل من التصحيح النسبوي والتأخر الخاص، حيث يُعطى هذا التابع بالعبارة(3.3):

$$L_1 = \sum_k (-m_k c^2 + \frac{1}{2}m_k \mathrm{v}_k^2) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k>i}\frac{e_i e_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} \quad (3.21)$$

أما $L_2$ فهو تابع يجب اضافته إلى التابع السابق، حيث يؤخذ فيه بالحسبان الحدود حتى المرتبة $(\mathrm{v}/c)^3$:

$$L_2 = \frac{1}{4c^2}\{\sum_k \frac{m_k \mathrm{v}_k^4}{2} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{k>i} e_i e_k [\frac{\vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} + \frac{((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_i)((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_k)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|^3}]\} \quad (3.22)$$

وبمعرفة تابع لاغرانج يمكن تعيين طاقة وكتلة واندفاع الجملة. أما الطاقة الكلية، فتعين في الحالة العامة بِ: $E_{tot} = \sum_k \vec{\mathrm{v}}_k \frac{\partial L}{\partial \vec{\mathrm{v}}_k} - L = E_0 + E_1 + E_2$. علماً أن:

$$E_0 = \sum_k \vec{\mathrm{v}}_k \frac{\partial L_0}{\partial \vec{\mathrm{v}}_k} - L_0 = 0 - L_0 = \sum_k m_k c^2 \quad (3.23)$$

وأن:

$$E_1 = \sum_k \frac{1}{2}m_k \mathrm{v}_k^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k>i}\frac{e_i e_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} \quad (3.24)$$

وكذلك:

$$E_2 = \sum_k \vec{\mathrm{v}}_k \frac{\partial L_2}{\partial \vec{\mathrm{v}}_k} - L_2 \quad (3.25)$$

علماً أن $L_2$ معطى بالعبارة(3.22)، ولحساب $E_2$ ، نحسب $E_2^{(1)}$ اولاً: $E_2^{(1)} = \sum_k \vec{\mathrm{v}}_k \dfrac{\partial L_2^{(1)}}{\partial \vec{\mathrm{v}}_k} - L_2^{(1)}$

حيث $L_2^{(1)}$ هو الحد الأول من(3.22): $L_2^{(1)} = \dfrac{1}{4c^2}\sum_k \dfrac{m_k}{2}\,\mathrm{v}_k^4$ وبالتالي يكون:

$$E_2^{(1)} = \frac{1}{4c^2}[\sum_k 2m\ \mathrm{v}_k^4 - \sum_k \frac{m_k}{2}\ \mathrm{v}_k^4] = \frac{3}{8}\sum_k \frac{m_k \mathrm{v}_k^4}{c^2} \tag{3.26}$$

ومن ثم نحسب ثانياً $E_2^{(2)}$: $E_2^{(2)} = \sum_{k>i} \vec{\mathrm{v}}_k \dfrac{\partial L_2^{(2)}}{\partial \vec{\mathrm{v}}_k} + \sum_{k>i} \vec{\mathrm{v}}_i \dfrac{\partial L_2^{(2)}}{\partial \vec{\mathrm{v}}_i} - L_2^{(2)}$ (حيث يوجد هنا للجملة دليلان ويجب الجمع من أجل كل منهما). علماً أن $L_2^{(2)}$ هو الحد الثاني من العبارة(3.22):

$L_2^{(2)} = \dfrac{1}{8\pi c^2 \varepsilon_0}\sum_{k>i} e_i e_k \dfrac{\vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|}$ وبالتالي يكون:

$$E_2^{(2)} = \frac{1}{8\pi c^2 \varepsilon_0}\sum_{k>i} e_i e_k \frac{\vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} \tag{3.27}$$

ومن ثم نحسب ثالثاً $E_2^{(3)}$: $E_2^{(3)} = \sum_{k>i} (\vec{\mathrm{v}}_k \dfrac{\partial L_2^{(3)}}{\partial \vec{\mathrm{v}}_k} + \vec{\mathrm{v}}_i \dfrac{\partial L_2^{(3)}}{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}) - L_2^{(3)}$ . علماً أن $L_2^{(3)}$ هو الحد الثالث من العبارة(3.22)، أي أن: $L_2^{(3)} = \dfrac{1}{8\pi c^2 \varepsilon_0}\sum_{k>i} e_i e_k \dfrac{((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_i)((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_k)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|^3}$ وبالتالي يكون:

$$E_2^{(3)} = \frac{1}{8\pi c^2 \varepsilon_0}\sum_{k>i} e_i e_k \frac{((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_i)((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_k)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|^3} \tag{3.28}$$

وبجمع(3.26) و(3.27) و(3.28) نحصل على عبارة الطاقة $E_2$ :

$$\begin{aligned} E_2 = E_2^{(1)} + E_2^{(2)} + E_2^{(3)} = \frac{3}{8}\sum_k \frac{m_k \mathrm{v}_k^4}{c^2} + \frac{1}{8\pi c^2 \varepsilon_0}\sum_{k>i} e_i e_k [\frac{\vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} + \\ + \frac{((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_i)((\vec{r}_k - \vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_k)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|^3}] \end{aligned} \tag{3.29}$$

يتضح لنا من ذلك أنه لايمكن كتابة طاقة الجملة على شاكلة مجموع طاقتين حركية وكامنة. والتصحيح $E_2$ لهذه الطاقة يتعلق بالإحداثيات، ويتعلق كذلك بالسرعات. وتبعاً لهذا التصحيح لايتحقق هنا مايسمى الطاقة الكامنة، ولا تصح هذه التسمية "طاقة كامنة" إلا في الحالة التي تكون فيها الشحنات ساكنة، أو في الحالات التي تكون فيها متحركة بشكل بطيء، لدرجة يمكن فيها اهمال الحدود من المرتبة $(\mathrm{v}/c)^2$ بشكل كامل، حيث يمكن عندئذٍ اهمال الحد $E_2$ ، والابقاء على الحد $E_1$ ، علاقة(3.24) واستخدام مفهوم الطاقة الكامنة المعينة بالشكل(3.1). لنستخدم التعيين العام للكتلة الكلية، فنلاحظ أنه يمكننا كتابة كتلة الجملة وفق(3.23) بالشكل:

$$M_{tot} = \frac{E_{tot}}{c^2} = \frac{E_0 + E_1 + E_2}{c^2} = \sum_k m_k + \frac{E_1 + E_2}{c^2} \tag{3.30}$$

حيث تتألف كتلة الجملة من الكتلة السكونية لمجموع الجسيمات $\sum_k m_k$ ، والكتلة ذات المنشأ: من الطاقة الحركية ومن طاقة الفعل المتبادل بين الجسيمات(والتي هي الطاقة الكامنة في تقريب الشحنات غير المتحركة). ومن الملاحظ هنا أن الكتلة لاتتمتع هنا بخواص جمعية للكتل المنفصلة، المؤلفة للجملة. لكن على الرغم من ذلك تبقى طاقة

الجملة وكتلتها معاً كمية منحفظة. لكن لايمكن تطبيق قانون انحفاظ الطاقة والكتلة لكل من الحدود التي تدخل في عبارتي الطاقة $E_{tot}$ والكتلة $M_{tot}$ على انفصال. أما اندفاع الجملة، فيعين من العبارة :

$$\vec{P}=\sum_k \frac{\partial L_k}{\partial \vec{\mathrm{v}}_k}=\vec{P}_1+\vec{P}_2 \tag{3.31}$$

علماً أننا نحصل على $\vec{P}_1$ من(3.21): $\vec{P}_1=\sum_k \frac{\partial L_1}{\partial \vec{\mathrm{v}}_k}=\sum_k m_k\vec{\mathrm{v}}_k$، وهو الشكل العام للاندفاع في الميكانيك التقليدي. أما $\vec{P}_2$ فهو التصحيح النسبي لاندفاع هذه الجملة، ونحصل عليه من(3.22):

$$\vec{P}_2=\sum_k\left(\frac{\partial L_2}{\partial \vec{\mathrm{v}}_k}+\frac{\partial L_2}{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}\right)=\frac{1}{2c^2}\sum_k m_k\vec{\mathrm{v}}_k^2\vec{\mathrm{v}}_k+\frac{1}{4\pi c^2\varepsilon_0}\sum_{k>i}e_ie_k\left[\frac{\vec{\mathrm{v}}_i}{|\vec{r}_k-\vec{r}_i|}+\frac{(\vec{r}_k-\vec{r}_i)\vec{\mathrm{v}}_i}{|\vec{r}_k-\vec{r}_i|^3}\right] \tag{3.32}$$

حيث تم في الحد الثاني من الطرف الأيمن جمع الحدين(الضرب بِ 2). يتضح من هذه العبارة(3.32) لِ $\vec{P}_2$، أن هذا الاندفاع يتعلق بمواضع الجسيمات المشحونة. ومن الممكن التأكد في هذا التقريب أن بالإمكان استخدام مفهوم مركز عطالة الجملة، هذا المفهوم الذي ليس له وجود في حالة جمل الجسيمات ذات الأبعاد المتبادلة الكيفية. ومن العبارة(1.22): $\vec{\mathrm{V}}_{c.in}=c^2\vec{P}/E_{tot}$، التي تعين سرعة مركز العطالة. وبالإمكان تعيين السرعة $\vec{\mathrm{V}}_{c.in}$، على شاكلة المشتق بالنسبة للزمن لنصف القطر المتجه $\vec{R}_{c.in}$، الذي يعين مركز العطالة، والذي يُكتب:

$$\vec{R}_{c.in}=\frac{\sum_k\left[m_kc^2+\frac{1}{2}m_k\mathrm{v}_k^2+\frac{e_k}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i{}'\frac{e_i}{|\vec{r}_k-\vec{r}_i|}\right]\vec{r}_k}{E_0+E_1} \tag{3.33}$$

علماً أن الفتحة فوق الطرف الأيمن في المجموع الأخير تعني عدم وجود الحد $i=k$ في المقدار الموجود داخله. هذا وبالإمكان التأكد من صحة كتابة $\vec{R}_{c.in}$ بالشكل(3.33)، فلدينا، وفق(1.22):

$$\vec{\mathrm{V}}_{c.in}=\frac{d\vec{R}_{c.in}}{dt}=\frac{c^2\vec{P}}{E_{tot}} \tag{3.34}$$

والتي تعد محققة حتى المرتبة الثانية بالنسبة لِ$(\mathrm{v}/c)^2$حيث يمكن أن نلاحظ هنا أن:

$$\frac{d\vec{R}_{c.in}}{dt}=\frac{\sum_k\left[m_kc^2+\frac{1}{2}m_k\mathrm{v}_k^2+\frac{e_k}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i{}'\frac{e_i}{|\vec{r}_k-\vec{r}_i|}\right]\vec{\mathrm{v}}_k}{E_0+E_1}=\frac{\vec{P}\cdot c^2}{E_0+E_1}$$

ومن ذلك، وبمقارنة الطرفين الأخيرين من هذه العبارة الأخيرة، نجد أن:

$$\vec{P}=\sum_k m_k\vec{\mathrm{v}}_k+\frac{1}{2c^2}\sum_k m_k\mathrm{v}_k^2\vec{\mathrm{v}}_k+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\sum_k e_k\sum_i{}'\frac{e_i\vec{\mathrm{v}}_k}{|\vec{r}_k-\vec{r}_i|}$$

وهذه العبارة الأخيرة لِ $\vec{P}$ (3.31) $\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2$ لكن بعد استبعاد الحد الأخير من $\vec{P}_2$ المعينة في(3.32)، لأنه لو وجد هذا الحد لما كان بالإمكان استخدام مفهوم مركز العطالة $\vec{R}_{c.in}$، كما ذكرنا سابقاً. زيادة على ذلك، فإن جملة النقاط المادية تمتلك عزم اندفاع.

$$\vec{L}=\sum_k\vec{r}_k\times\vec{P}_k=\vec{L}_0+\vec{L}_1\quad,\quad(\vec{P}_k=\partial L/\partial\vec{\mathrm{v}}_k) \tag{3.35}$$

حيث $L$ هنا هو تابع لاغرانج وليس العزم. علماً أن $\vec{L}_0$ هو عزم الاندفاع محسوباً في الميكانيك التقليدي. أما $L_1$ فهو التصحيح النسبي المتعلق بإحداثيات وسرعات جميع جسيمات الجملة. يمكن أن نلاحظ في هذا التقريب، الذي

يؤخذ فيه بالحسبان الحدود حتى المرتبة $(\mathrm{v}/c)^2$ صفراً امكانية دراسة هذا التقريب باستخدام المفاهيم الأساسية في الميكانيك التقليدي، لكن لاوجود عندئذٍ في هذا التقريب النسبوي لما يسمى بالطاقة الكامنة للجملة، بالمعنى المألوف في الميكانيك التقليدي. بهذا الشكل نرى أنه زيادة على مابحثناه في حالة الجمل متبادلة الأفعال عن طريق التصادمات، فإن نظرية النسبية تسمح ببناء ميكانيك عام للجمل متبادلة الأفعال، لكن يكون في هذه الحالة لهذه النظرية خواصاً تقريبية من المرتبة $(\mathrm{v}/c)^2$. أما الأخذ بالحسبان الحدود اللاحقة من النشر تبعاً لمراتب أعلى من ذلك لِـ$(\mathrm{v}/c)$، فهو ممكن لكن فقط في الحالات التي لاتحتوي فيها الجمل على ثنائيات أقطاب[حدود من مرتبة $(\mathrm{v}/c)^3$] أو على حدود من مرتبة رباعيات الأقطاب $(\mathrm{v}/c)^4$، أو أعلى من ذلك. نحتاج أحياناً إلى تمثيل طاقة الفعل المتبادل في الحالة التي تتألف فيها الجملة من جسيمين: يمكن عندئذٍ كتابة تابع لاغراج للجسيم الأول بالشكل:

$$L_1 = -m_1c^2\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} - e\varphi + e_1(\vec{\mathrm{v}}_1\cdot\vec{A}) \qquad (3.36)$$

حيث نفترض أن $\varphi$ و $\vec{A}$ هما المكونان اللذان يسببهما الجسيم الثاني في النقطة من الفراغ، التي يوجد فيهما الجسيم الأول في اللحظة $t$. ومع الأخذ بالحسبان التأخر الحاصل وعند أي قانون اختياري للحركة، يكون الكمونان $\varphi$ و $\vec{A}$ مرتبطان مع بعضهما بعلاقة، يتم الحصول عليها باستخدام تحويلات الكمون رباعي الأبعاد في نظرية النسبية الخاصة، فإذا افترضنا أن جملة المقارنة العطالية $K'$ تتحرك بالنسبة إلى جملة المقارنة العطالية $K$ بسرعة تساوي $\vec{\mathrm{v}}_2$وفق المحورين $ox$ و $ox'$ المنطبقين على بعضهما، فإننا نجد أن:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ i/c\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1\text{-}(\mathrm{v}_2^2/c^2)} & 0 & 0 & -(i\mathrm{v}_2/c)/\sqrt{1\text{-}(\mathrm{v}_2^2/c^2)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (i\mathrm{v}_2/c)/\sqrt{1\text{-}(\mathrm{v}_2^2/c^2)} & 0 & 0 & 1/\sqrt{1\text{-}(\mathrm{v}_2^2/c^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \\ i/c\varphi' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &A_x = [A'_x + i(\mathrm{v}_2/c^2)\varphi']/\sqrt{1\text{-}(\mathrm{v}_2^2/c^2)}\ ,\ A_y = A'_y\ ,\ A_z = A'_z, \\ &\varphi = [\varphi' + i(\mathrm{v}_2/c)A'_x]/\sqrt{1\text{-}(\mathrm{v}_2^2/c^2)} \end{aligned}$$

ونظراً لعدم وجود حقل مغنطيسي في الجملة $K'$، فإن $A'_x = 0$، وكذلك $A_y = A'_y = 0$ و $A_z = A'_z = 0$

وبالتالي نجد أن: $A_x = [0 + i(\mathrm{v}_2/c^2)\varphi']/\sqrt{1\text{-}(\mathrm{v}_2^2/c^2)}$ و $\varphi = \varphi'/\sqrt{1\text{-}(\mathrm{v}_2^2/c^2)}$

وبالتالي: $A_x = (\mathrm{v}_2/c^2)\varphi$ ومنه نجد أن:

$$\vec{A} = (\vec{\mathrm{v}}_2/\mathrm{c}^2)\varphi \qquad (3.37)$$

وبتعويض $\vec{A}$ محسوبة من(3.37) في عبارة تابع لاغرانج السابقة $L_1$، المعين في(3.36)، نجد أن:

$$L_1 = -m_1c^2\sqrt{1-(\mathrm{v}^2/c^2)} - e_1[1-(\vec{\mathrm{v}}_1\cdot\vec{\mathrm{v}}_2)/c^2]\varphi \qquad (3.38)$$

علماً أن $\vec{\mathrm{v}}_1$ و $\vec{\mathrm{v}}_2$ سرعتي الجسيمين المشحونين الأول والثاني. ومن ذلك ينتج أن بالإمكان تعيين طاقة الفعل المتبادل بين الجسيمين المشحونين بالشكل: $U_{\text{inter.}} = e[1-(\vec{\mathrm{v}}_1\cdot\vec{\mathrm{v}}_2)/c^2]\varphi$

علماً أن $\varphi$الكمون المرتبط بالبعد اللحظي $R(\tau)$ بين الجسيمين $\vec{R}(\tau) = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ .

## النتائج والمناقشة

تم الحصول من خلال هذا العمل على حركة جملة جسيمات في نظرية النسبية الخاصة، على صيغة كل من طاقة واندفاع الجملة من خلال الكميات التي تعين المقادير الموافقة للجسيمات المنفصلة، وأن الطاقة الكلية للجملة يتطلب الأخذ بالحسبان طاقات الأفعال المتبادلة بين الجسيمات. كما تم الحصول على صيغ رياضية تقريبية للأفعال المتبادلة بين الجسيمات المشحونة، وعلى تابع لاغرانج لجملة الجسيمات، وان حركة جملة الجسيمات المشحونة مرتبطة بحالة الحقل الكهرطيسي. قارنا ايضاً بين نتائجنا في الميكانيك النسبي والتقليدي. كل هذه النتائج وزيادة على ذلك ذكرناها في متن البحث وناقشناها بشكل مفصّل وفقاً للعلاقات الرياضية المناسبة في حينها والتي استنتجناها بشكل متسلسل وواضح.

## الاستنتاجات والتوصيات

نستنتج من خلال هذه المقالة لحركة جملة جسيمات في نظرية النسبية الخاصة، أنه زيادة على مابُحث في حالة الجمل متبادلة الأفعال عن طريق التصادمات، فإن نظرية النسبية تسمح ببناء ميكانيك عام للجمل متبادلة الأفعال، ضمن خواص تقريبية من المرتبة $(\mathrm{v}/c)^2$، وبالإمكان الأخذ بالحسبان الحدود اللاحقة من النشر ً لمراتب أعلى لـ$(\mathrm{v}/c)$، في الحالات التي لاتحتوي فيها الجمل على ثنائيات أقطاب أو رباعيات أقطاب، أو أعلى من ذلك.

من المفيد متابعة هذا البحث ليشمل أيضاَ دراسة حركة الجسيمات المشحونة في الحقول الكهرطيسية الساكنة، لما لهذه الدراسة من درجة كبيرة من الأهمية في الجوانب العملية، مثل دراسة حركة الالكترونات التي تسمح بدرجة كبيرة من الدقة من التأكد من صحة الصياغة النسبية للاندفاع. كما تقع العلاقات النسبية التي تعين قانون حركة الجسيمات في الحقول الكهرطيسية في أسس عمل المسرعات الحديثة للجسيمات النووية.

## المراجع


[1] Ben Yu-Kuang Hu, *Relativistic momentum and kinetic energy, and E = mc², Eur.* J. Phys. **30** (2009) 325–330.

[2] Mohamed Salem, T*he Relativistic Mechanic Theory of the String*, Journal of Modern Physics, 2015, **6**, 374-380.

[3] Michael Tsamparlis, *Special Relativity*, Springer, 2010.

[4] C. Semay, B. Silvestre-Brac, Relativité Restreinte, Dunod, Paris, 2005.

[5] H. Goldstein, C.Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, third edition, Addison Wesley, 2000.

[6] Daniel Arovas, *Lecture Notes on Classical Mechanics*, Department of Physics University of California, San Diego, 2013.

[7] *Dr. James E. Parks, The Compton Effect-Compton Scattering and Gamma Ray Spectroscopy*, Department of Physics and Astronomy, University of Tennessee, 2015.

[8] P. AMIOT et L. MARLEAU, *Mécanique analytique*, université Laval, Québec, Canada, 2017.

[9] Hans C. Ohanian, *Classical Electrodynamics*, allyn and Bacon, Inc.1988.

[10] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, 1999.

[11] Bertrand B. Daniel M, Ernesto M, Gauge transformations and conserved quantities in classical and quantum mechanics, arXiv:1606.05748v1[quant-ph]18 Jun, 2016.

[12] Marco A. Rosales M. and G. Ares de Parga, *Comment on gauge transformations in classical mechanics*, Revista Mexicana de Fisica 34 No. 1(1988).