مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (4) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (4) 2014

Stability and instability of small motions of a pendulum with a cavity filled with a system of ideal capillary fluids

Dr. Wadia Ali*

(Received 1 / 6 / 2014. Accepted 4 / 8 /2014)

□ ABSTRACT □

The aim of this paper is to study the spectral problem of small motions of a pendulum with a cavity filled with a system of ideal capillary fluids when the condition of statically stable in linear approximation is valid. It is proved that this problem has a real discrete spectrum with a limit point at $+\infty$ and the eigenvalues for this problem are successive minima of variation ratio. It is also proved that if the operator of potential energy of a system (pendulum + a system of ideal capillary fluids)has κ a negative eigenvalues, then the solutions of the initial boundary value problem are instable.

Key words: Capillary fluid, differential equation in Hilbert space, small motions, Hydrodynamical system, spectral problem.

***Associate Professor, Department of Mathematic, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (4) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (4) 2014

استقرار وعدم استقرار الحركات الصغيرة لنواس ذي تجويف مملوء بمجموعة سوائل شعرية مثالية

الدكتور وديع علي*

(تاريخ الإيداع 1 / 6 / 2014. قُبِل للنشر في 4 / 8 /2014)

□ ملخّص □

الهدف من هذا البحث هو دراسة المسألة الطيفية للحركات الصغيرة لنواس ذي تجويف مملوء بمجموعة من السوائل الشعرية المثالية عندما يتحقق شرط الاستقرار بالتقريب الخطي. فقد تم البرهان على أن لهذه المسألة طيفاً حقيقياً متقطّعاً له نقطة تراكم عند $+\infty$ وأن القيم الخاصة لهذه المسألة هي نهايات صغرى متتالية لنسب متغيرة، كما تم البرهان على أنه إذا كان لمؤثر الطاقة الكامنة لجملة (نواس + مجموعة سوائل شعرية مثالية) κ قيمة خاصة سالبة فإن حلول المسألة الحدية الابتدائية لهذه الجملة غير مستقرة.

الكلمات المفتاحية: سائل شعري، المعادلة التفاضلية في فضاء هلبرت، الحركات الصغيرة ، الجملة الهيدروديناميكية، المسألة الطيفية.

---

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مقدمة:

درست مسائل الحركات الصغيرة لسائل في أنبوب بشروط قريبة من حالة انعدام الوزن، عندما ينبغي أن تؤخذ القوى الشعرية (السطحية) بالحسبان، ما بين العامين 1960 و 1980 في عدة أبحاث [1,2] . طرائق المؤثرات المستخدمة في هذه المسائل موضحة بالتفصيل في [1] وأيضا في [3,4]. تمت في البحث [5] دراسة مسألة الاستقرار وعدم الاستقرار للحركات الصغيرة لجملة هيدروديناميكية (نواس+ تجويف مملوء بسائل شعري مثالي). وفي البحث [6] درست مسألة الحركات الصغيرة لجملة هيدروديناميكية (نواس+ مجموعة من السوائل الشعرية المثالية)، أما في البحث الحالي فإننا ندرس استقرار الحركات الصغيرة لهذه الجملة بالاعتماد على بعض طرائق التحليل الدالي ونظرية المؤثرات وتحديداً طريقة الإسقاط على منشور متعامد لفضاء هلبرت والنظرية الطيفية لمؤثر مترافق ذاتياّ ومتراص.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى دراسة استقرار وعدم استقرار الحركات الصغيرة لنواس ذي تجويف مملوء بمجموعة من السوائل الشعرية المثالية من خلال الاستفادة من بعض ما توصلنا إليه في البحث[6] من تحويل مسألة القيمة الحدية الابتدائية الموافقة لجملة (نواس + مجموعة سوائل مثالية شعرية) إلى مسألة كوشي بمعادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية في فضاء هلبرت $L_2(\Omega)$، ومن ثم تحويل مسألة كوشي الناتجة إلى مسألة طيفية مترافقة ذاتياً وذلك بجعل حلولها تابعة للزمن بالشكل : $e^{-\lambda t}$; $\lambda \in \square$.

نشير إلى أنّ أهمية هذا البحث تكمن في تطبيقاته العملية في مجال الفيزياء علماً أن مسائل حركات الأجسام ذات التجويفات المملوءة بسائل ترتبط بتكنولوجيا الصواريخ.

طرائق البحث ومواده:

ندرس في هذا البحث مسائل القيم الحدية الابتدائية الخطية لجملة هيدروديناميكية وذلك باستخدام طرائق التحليل الدالي ونظرية المعادلات التفاضلية الخطية في فضاء هلبرت والنظرية الطيفية لمؤثرات مترافقة ذاتياً والتي ظهرت في العديد من الأعمال [2,4,5,6,7].

المسألة المقدّمة:

لنفرض في حالة السكون أنّ النواس ذا التجويف $\Omega \subset \square^2$ معلق في نقطة مفروضة O نعدّها مبــدأ لجملة إحداثيات ديكارتية ثابتة $Oy_1y_2y_3$. ولنفرض أنّ التجويف Ω مملوء بمجموعة m مـــن السوائل الشعرية المثالية التي كثافاتها $\rho_i\ , i=\overline{1,m}$ تحقق $\rho_1 > \rho_2 > ... > \rho_m > 0 :$. ولتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة إحداثيات ديكارتية متحركة مرتبطة بالنواس .

سندرس الحركات الصغيرة لجملة (نواس + مجموعة السوائل الشعرية) عندما يؤثر في هذه الجملة حقل الجاذبية الأرضية $\vec{g} = -g\,\vec{e_3'}$ وحقل القوى الخارجية $\vec{f} = \vec{f}\,(t,x)$ حيث $\vec{e}_i\ , \vec{e_i'}$ متجهات الوحدة على الترتيب على $Oy_i\ ,Ox_i\ \ ,i = 1,2,3$. عندئذٍ تأخذ معادلات الحركة لهذه الجملة الشكل الآتي[1]:

$$\rho_k \frac{\partial^2 \overrightarrow{w}_k}{\partial t^2} + \rho_k \left(\frac{d^2 \vec{\delta}}{dt^2} \times \vec{r} \right) + \nabla p_k = \vec{f}(t,x) \tag{1}$$

$$div\, \overrightarrow{w}_k = 0 \ (in\, \Omega_k)\ ,\ k = \overline{1,m}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \rho_k \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_k} (\vec{r} \times \overrightarrow{w}_k)\, d\Omega_k + J \frac{d\vec{\omega}}{dt} + m_0 g \ell \vec{\delta}$$

$$-g \sum_{k=1}^{m-1} (\rho_j - \rho_{j+1}) \int_{\Gamma_j} (\vec{e}_3 \times \vec{r}) \varsigma_j \, d\Gamma_j = \overrightarrow{M}(t)\ ,\ j = \overline{1,m-1} \tag{2}$$

حيث $\vec{w}_k = \vec{w}_k(t,x)\,,\,(x \in \Omega, k = \overline{1,m})$ حقول السرعة النسبية في السوائل، $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ متجه الانتقال الزاوي للنواس، $\vec{r} = x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ متجه الموضع لنقاط المناطق $\Omega_k\ ,k = \overline{1,m}$.

$p_k\ ,k = \overline{1,m}$ الضغط الديناميكي في السوائل ، $J = J_b + \sum_{k=1}^{m} (J_\ell)_k > 0$ مركبة تنسور العطالة لجملة (نواس + سوائل) بالنسبة للمبدأ O والتي تساوي مجموع مركبتي تنسور عطالة النواس J_b وتنسورات عطالة السوائل $(J_\ell)_k\ ,k = \overline{1,m}$ ، m_0 كتلة الجملة، $\varsigma_j = \vec{w}_j.\vec{n}_j\ \ (on\ \Gamma_j)\ ,\ j = \overline{1,m-1}$ حيث $\vec{n}_j$ الناظم على Γ_j ، $\ell = \overline{OC}$ حيث C مركز ثقل الجملة ، $\vec{M}(t)$ العزم الرئيسي للقوى الخارجية المؤثرة في الجملة ، $\varsigma_j(t,x_2)$ الدالة التي تعرّف انحراف السطح المتحرك $\Gamma_j(t)$ للسائل عن السطح المتوازن Γ_j.

والشروط الحدية على S_k (الجدار الصلب للمنطقة $\Omega_k\ ,k = \overline{1,m}$) وعلى $\Gamma_j\ ,\ j = \overline{1,m-1}$ السطوح الحرة للسوائل هي:

$$\vec{w}_k.\vec{n}_k = \vec{w}_{k+1}.\vec{n}_k = 0 \ (on\ S_k\ ,k = \overline{1,m}) \tag{3}$$

$$p_j - p_{j+1} = \sigma_j L_j \varsigma_j + (\rho_j - \rho_{j+1}).g.(\vec{\delta} \times \vec{r}).\vec{e}_3\ ,\ \int_{\Gamma_j} \varsigma_j \, d\Gamma_j\ ,\ (j = \overline{1,m-1}) \tag{4}$$

$$\sigma_j L_j \varsigma_j := -\sigma_j \Delta_{\Gamma_j} \varsigma_j - \sigma_j \left(\left(k_1^2 \right)_j \right) \varsigma_j + (\rho_j - \rho_{j+1}) g \cos(\vec{n}_j, \vec{e}_3) \varsigma_j\ ,$$

$$\frac{\partial \varsigma_j}{\partial \nu_j} + \chi_j \varsigma_j = 0 \quad (on\ \partial\Gamma_j), \qquad j = \overline{1,m-1} \tag{5}$$

حيث σ_j ثابت التوتر السطحي ، $(k_1)_j$ التقوّس الأساسي لـــ Γ_j ، Δ_{Γ_j} مؤثر لابلاس .

والشروط الابتدائية:

$$\vec{w}(0,x) = \vec{w}_k^{\,0}(x), x \in \Omega\ ,\ \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^0\ ,\ \frac{\partial \vec{w}_k^{\,0}}{\partial t} = \vec{v}_k^{\,0}(x) \tag{6}$$

والمطلوب الآن دراسة استقرار حلول هذه المسألة أي دراسة استقرار حقول السرعة $\vec{w}_k$ ، الضغط الديناميكي $p_k \left(k = \overline{1,m} \right)$ ، متجه الانتقال الزاوي $\vec{\delta}$ والدوال $\varsigma_j \left(j = \overline{1,m-1} \right)$ من المعادلات $(1)-(6)$.

تعريف(1):[1]

تدعى مجموعة الدوال $\hat{u} := \{ \vec{u}_k(x) \}_{k=1}^{m}$ التي تحقق العلاقة:

$$\| \vec{u} \|_{\vec{L}_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^{m} \rho_k \int_{\Omega_k} | \vec{u}_k(x) |^2 d\,\Omega_k < \infty \qquad (7)$$

بفضاء هلبرت $L_2(\Omega)$ حيث الجداء الداخلي فيه معرّف بالعلاقة:

$$(\vec{u}, \vec{v})_{L_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^{m} \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{u}_k \, \vec{v}_k \; d\,\Omega_k \qquad (8)$$

مبرهنة(1): [3]

لتكن Ω منطقة مقسمة إلى Ω_k منطقة جزئية و $\partial\Omega_k$ (حدود المنطقة Ω_k ، $k = \overline{1,m}$) تحقق شروط ليبتشيز [3]. عندئذٍ يكون:

$$L_2(\Omega) := \hat{J}_0(\Omega) \oplus \hat{G}_{0,S}(\Omega) \oplus \hat{G}_{\Gamma}(\Omega) \qquad (9)$$

$$\hat{J}_0(\Omega) := \mathop{\oplus}_{k=1}^{m} \vec{J}_0(\Omega_k) := \left\{ \hat{w} = \{\vec{w}_k(x)\}_{k=1}^{m} \in \hat{L}_2(\Omega) : div\, \vec{w}_k = 0 \;(in\, \Omega_k), \vec{w}_k . \vec{n} = 0 \;\; (on\, \partial\Omega_k) \right\} \quad (10)$$

$$\hat{G}_{h,S}(\Omega) := \mathop{\oplus}_{k=1}^{m} G_{h,S}(\Omega_k) = \{ \hat{v} = \{\vec{v}_k(x)\}_{k=1}^{m} \in \hat{L}_2(\Omega) :$$

$$\hat{v}_k = \nabla \varphi_k \;\; , \Delta\varphi_k = 0 \quad (in\, \Omega_k) \;\; , \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = 0 \quad (on\;\, S_k) \; , k = \overline{1,m}$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n_j} = \frac{\partial \varphi_{j+1}}{\partial n_j} \;\; (on\;\, \Gamma_j), \int_{\Gamma_j} (\rho_j \varphi_j - \rho_{j+1} \varphi_{j+1}) d\,\Gamma_j = 0, \qquad j = \overline{1, m-1}$$

$$\int_{\Gamma_{m-1}} \rho_m \varphi_m d\,\Gamma_{m-1} = 0 \; \} \qquad (11)$$

$$\hat{G}_{\Gamma}(\Omega) := \mathop{\oplus}_{k=1}^{m} G_{\Gamma}(\Omega_k) = \{ \hat{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^{m} \in \hat{L}_2(\Omega) :$$

$$\vec{u}_k = \nabla p_k \;\; (in\, \Omega_k) \; , k = \overline{1,m} \;\; , \rho_j \, p_j - \rho_{j+1} p_{j+1} = 0, \; (on\;\, \Gamma_j) \;\; j = \overline{1, m-1}$$

$$\int_{\Gamma_{m-1}} \rho_m \, p_m d\,\Gamma_{m-1} = 0 \; \} \qquad (12)$$

تعريف(2): [1]

تدعى مجموعة جميع القيم الخاصة لمؤثر A بالطيف النقطي ونرمز له بــ $\sigma_p(A)$ أي:

$$\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \exists x \neq 0; Ax = \lambda x$$

تعريف(3):[3]

يقال عن فضاء جزئي L من فضاء هلبرت E إنّه لامتغير بالنسبة للمؤثر $A : E \to E$ إذا وفقط إذا :

$$\forall y \in L \Rightarrow Ay \in L$$

تعريف(4):[3]

ندعو مجموعة جميع القيم الخاصة λ لمؤثر A والتي تحقق:

- λ نقطة منعزلة من الطيف $\sigma(A)$

- الفضاء الخاص $L_{\lambda}(A)$ الموافق للقيمة λ منتهي البعد
- الفضاء E يقبل النشر بالشكل: $E = L_{\lambda}(A) + N_{\lambda}(A)$ حيث $N_{\lambda}(A)$ فضاء جزئي لامتغير بالنسبة للمؤثر A

بالطيف المتقطع $(discrete\ spectrum)$ للمؤثر A.

النتائج والمناقشة:

بإسقاط المعادلة (1) على المنشور المتعامد (9) بواسطة مؤثرات الإسقاط العمودي $P_0\ ,P_{h,S}\ \ ,P_{\Gamma}$ في الفضاءات الجزئية $\hat{J}_0(\Omega)\ ,\ \hat{G}_{h,S}(\Omega)\ ,\hat{G}_{\Gamma}(\Omega)$ على الترتيب، وباستخدام المؤثر C لمسألة القيمة الحدية المساعدة:

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi_k = 0 \quad in\,\Omega_k \quad , \quad \frac{\partial\Phi_k}{\partial n} = 0 \quad on\ S_k \ \ ,k = \overline{1,m}\\
&\frac{\partial\Phi_j}{\partial n_j} = \frac{\partial\Phi_{j+1}}{\partial n_j} = \varsigma_j \quad (on\ \Gamma_j)\\
&\int_{\Gamma_i}(\rho_j\Phi_j - \rho_{j+1}\Phi_{j+1})d\Gamma_j = 0, \qquad j = \overline{1,m-1}\\
&\int_{\Gamma_{m-1}}\rho_m\Phi_m d\,\Gamma_{m-1} = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

المعرّف بالشكل: $C\hat{\varsigma} := \left\{\left(\rho_j\Phi_j - \rho_{j+1}\Phi_{j+1}\right)_{\Gamma_j}\right\}_{j=1}^{m-1}$، تؤول المسألة $(1)-(6)$ إلى مسألة كوشي الآتية:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(A\xi\right) + B\xi = f\ (t)\ ,\ \ \xi(0) = \xi^0\ ,\xi'(0) = \xi^1 \tag{14}$$

في فضاء هلبرت $\oplus$ حيث: $H = L_{2,\Gamma}$

$$\begin{aligned}
&A = (A_{k\,l})_{k,l=1}^2\,,\ B = (B_{k\,l})_{k,l=1}^2\,,\xi = (\hat{\varsigma}^0,\vec{\delta}^0)^t\ ,\ \hat{\varsigma}^0 = \{\vec{w}_j.\vec{n}_j\}_{j=1}^m,\\
&\xi^1 = (\hat{\varsigma}^1,\vec{\omega}^0)^{\,t}\ ,\ \hat{\varsigma}^1 := \{\vec{u}_j^{\,0}.\vec{n}_j\}_{j=1}^m\,,\vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0\ ,\vec{\delta}'(0) = \vec{\omega}^0\,,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$f\ (t) = \left(\sum_{k=1}^m\rho_k\ \hat{F}\ ,\vec{M} - \sum_{k=1}^m\rho_k\int_{\Omega_k}(\vec{r}\times\vec{f}_{0,k})d\,\Omega_k\right)^t$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_{11}\,\hat{\varsigma} := C\,\hat{\varsigma}\,,\ A_{12}\vec{\delta} := \delta_1\hat{\psi}^0\ \ ,\ A_{21}\hat{\varsigma} := \left[\sum_{j=1}^{m-1}\int_{\Gamma_j}(\rho_j\varphi_j^{\,0} - \rho_{j+1}\varphi_{j+1}^{\,0})\varsigma_j\ d\ \Gamma_j\right]\vec{e}_1\,,\\
&A_{22}\vec{\delta} := (J_b + J_{\ell})\vec{\delta}\,,\nabla\hat{\psi}^0 = P_{0,S}\left\{\left(\vec{e}_1\times\vec{r}\right)|_{\Omega_k}\right\}_{k=1}^m = \left\{\nabla\psi_k^0\right\}_{k=0}^m\,,\\
&\hat{\psi}^0 := \left\{\left(\rho_j\psi_j^0 - \rho_{j+1}\psi_{j+1}^{\,0}\right)\right\}_{j=1}^{m-1}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}
&B_{11}\hat{\varsigma} := B_0\,\hat{\varsigma}\ ,\ \ B_{12}\,\vec{\delta} := g\,\left(\Delta\,\rho\right)\hat{\theta}\left(\vec{e}_1\times\vec{r}\,.\vec{e}_3\right)\delta_1\,,\\
&B_{21}\hat{\varsigma} := -g\sum_{j=1}^m\left(\Delta\,\rho\right)_j\int_{\Gamma_j}\left(\vec{e}_3\times\vec{r}\right)\varsigma_j\ d\,\Gamma_j\ \ ,B_{22}\vec{\delta} := mg\,\ell\,\vec{\delta}
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

مبرهنة(1):[3]

المسألة الحدية الابتدائية $(1)-(6)$ تكافئ تماماً مسألة كوشي $(14),(15)$ في فضاء هلبرت.

تمهيدية (1):[6]

المؤثر $A:=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ في العلاقة (14) مترافق ذاتياً وموجب ومتراص ويؤثر في فضاء هلبرت الحقيقي $H=L_{2,\Gamma}\oplus\mathbb{C}$.

تمهيدية (2):[6]

المؤثر B في العلاقة (14) مترافق ذاتياً ساحته $D(B)=D(B_0)\oplus\mathbb{C}$ ويكفي ليكون B موجباً أن يتحقق الشرط الآتي :

$$\lambda(B_0)>(ml)^{-1}g\sum_{j=1}^{m-1}(\Delta\rho)_j\beta_j \tag{18}$$

حيث $j=\overline{1,m-1}$, $B_0:=\hat{\theta}(\hat{\sigma}\hat{L})\hat{\theta},\hat{\sigma}\hat{L}:=diag\left(\sigma_jL_j\right)_{j=1}^{m-1}$.

مبرهنة(2):[6]

إذا كانت $\xi^0\in D(B)$, $f(t)\in C^2(\mathbb{R}_+,H)$ فإنّ لمسألة كوشي (14) حلاً قوياً وحيداً $\xi(t)$ في فضاء هلبرت H.

ندرس الآن استقرار أو عدم استقرار الجملة الهيدروديناميكية في التقريب الخطي، بمعنى آخر ندرس الحالات التي يكون فيها الشرط $\lambda(B_0)>(ml)^{-1}g\sum_{j=1}^{m-1}(\Delta\rho)_j\beta_j$ محققاً أو غير محقق.

من أجل ذلك، ندرس مسألة الاهتزازات الخاصة من أجل حلول للمسألة المتجانسة (14) التي لها الشكل: $\xi(t)=\xi\, e^{i\omega t}$ حيث ω تواتر اهتزاز الجملة.

بإجراء التحويل $\xi(t)=\xi e^{i\omega t}$ في المعادلة:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(A\xi\right)+B\xi=0$$

نحصل على المسألة الطيفية:

$$B\,\xi=\lambda A\,\xi\ ,\ \lambda=\omega^2\ ,\ \xi\in D(B)\subset \mathrm{H} \tag{19}$$

مبرهنة (3):[3]

إذا كان المؤثر A موجباً و متراصاً في فضاء هلبرت E فإن للمسألة:

$$u=\lambda Au \tag{20}$$

طيفاً متقطّعاً حقيقيّاً موجباً $0<\lambda_1\le\lambda_2\le.......\le\lambda_k\le...,\lambda_k\xrightarrow[k\to\infty]{}\infty$ ويكون:

$$\lambda_n^{-1} = \min_{M_{n-1}} \max_{z \perp M_{n-1}} \left[(Az, z)/(z, z)\right] \qquad (21)$$

حيث M_{n-1} فضاء جزئي كيفي ذي $n-1$ بعد في الفضاء E وعناصره متعامدة.

مبرهنة (4):

تملك المسألة (19) طيفاً متقطعاً حقيقياً مع نقطة تراكم عند $+\infty$ ، والقيم الخاصة للمسألة (19) نهايات صغرى متتالية لنسب متغيرة من الشكل:

$$(B\xi, \xi)_H / (A\xi, \xi)_H \ , \ \xi = (\hat{\varsigma}, \vec{\delta})^t \in D(B) \qquad (22)$$

البرهان:

استناداً إلى التمهيدية (2) يكون المؤثر $B^{1/2}$ موجوداً وبالتالي يمكن أن نضع $B^{1/2}\xi = \eta$ في المعادلة (19). لنضع $\xi = B^{-1/2}\eta$ ولنطبق المؤثر $B^{-1/2}$ المترافق ذاتياً والمحدود والموجب على طرفي المعادلة (19) عندئذٍ تأخذ المسألة (19) الشكل:

$$\eta = \lambda B^{-1/2} A B^{-1/2} \eta \qquad (23)$$

بما أن المؤثر A متراص والمؤثر $B^{-1/2}$ محدود ولأنّ جداء مؤثر محدود بمتراص هو مؤثر متراص ينتج أنّ المؤثر $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ متراص ، وبما أن المؤثر A موجب والمؤثر $B^{-1/2}$ مترافق ذاتياً ينتج:

$$\left(B^{-1/2}AB^{-1/2}\eta, \eta\right)_H = \left(AB^{-1/2}\eta, B^{-1/2}\eta\right)_H > 0, \ \eta \neq 0$$

وأنّ المؤثر $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ موجب. عندئذٍ تملك المسألة (23) استناداً إلى المبرهنة (3) طيفاً متقطعاً حقيقياً موجباً $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$.

بما أن المؤثر $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ متراص فإنه توجد قاعدة متعامدة منظمة $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}, \ (e_j, e_k) = \delta_{jk}$ في الفضاء H، تتألف من العناصر الخاصة للمؤثر $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ الموافقة للقيم الخاصة $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ ، أي أنّ:

$$\lambda_k B^{-1/2}AB^{-1/2}e_j = e_j$$

نلاحظ أنّ العناصر في الطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة تنتمي إلى $D(B^{1/2})$ وبالتالي $e_j \in D(B^{1/2})$ ، عندئذٍ نستطيع أن نكتب:

$$B^{1/2}e_j = \lambda_j AB^{-1/2}e_j \qquad (24)$$

لنضع $\xi_j = B^{-1/2}e_j$ في العلاقة (24) فنحصل على:

$$B\xi_j = \lambda_j A\xi_j \qquad (25)$$

ومنه :

$$\left(B^{1/2}\xi_j, B^{1/2}\xi_k\right)_H = \left(B\xi_j, \xi_k\right)_H = \lambda_j (A\xi_j, \xi_k)_H = \delta_{jk} \qquad (26)$$

أي أنّ $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ قاعدة متعامدة في كل من $(A.,.)$, $(B.,.)$.

عندئذٍ واستناداً إلى المبرهنة (3) ينتج أنّ:

$$\lambda_n^{-1} = \min_{M_{n-1}} \max_{z \perp M_{n-1}} \left[(B^{-1/2}AB^{-1/2}z, z)_H / (z, z)_H\right] \qquad (27)$$

حيث $M_{n-1} \subset D(B^{1/2})$. لنضع $B^{-1/2}z = \xi$ في العلاقة (27) فنحصل على:

$$\lambda_n^{-1} = \min_{L_{n-1}} \max_{\xi \perp L_{n-1}} \left[(A\xi,\xi)_H / (B^{1/2}\xi, B^{1/2}\xi)_H \right] \qquad (28)$$

حيث L_{n-1} فضاء جزئي كيفي ذي $n-1$ بعد في الفضاء H. وكون المؤثر $B^{1/2}$ مترافق ذاتياً نحصل على

:

$$\lambda_n^{-1} = \min_{L_{n-1}} \max_{\xi \perp L_{n-1}} \left[(A\xi,\xi)_H / (B\xi,\xi)_H \right] \qquad (29)$$

وبالتالي نستطيع القول إنّ القيم الخاصة للمسألة (19) هي نهايات صغرى متتالية لنسب متغيرة:

$$(B\xi,\xi)_H / (A\xi,\xi)_H \ , \ \xi = (\hat{\zeta}, \vec{\delta})^t \in D(B)$$

حيث :

$$(A\xi,\xi)_H = \sum_{k=1}^{m} \rho_k \int_{\Gamma_k} \left| \nabla\Phi_k + \delta_1 \nabla\varphi_k^0 \right|^2 d\Omega_k + J_b \left|\delta_1\right|^2 \qquad (30)$$

$$(B\xi,\xi)_H = \sum_{j=1}^{m-1} \{ (\Delta\rho)_j \, g \int_{\Gamma_j} \left| \zeta_j + \delta_1(\theta_j x_2) \right|^2 ds_j + g\,(ml - (\Delta\rho)_j) \int_{\Gamma_j} \left| \theta_j x_2 \right|^2 d\Gamma_j) \left|\delta_1\right|^2$$
$$+ \int_{\Gamma_j} \left\{ \sigma_j \left| \zeta_j' \right|^2 + \left[(\Delta\rho)_j \, g\,(\cos(\vec{n}_j, \vec{e}_3) - 1) - \sigma_j \kappa_{1,j}^2 \right] \left| \zeta_j \right|^2 \right\} ds_j$$
$$+ \sigma_j \sum_{i=1}^{2} \chi_j(s_i) \left| \zeta_j(s_i) \right|^2 \} \qquad (33)$$

نشير هنا إلى أن هذه النسب درست من أجل $\left(k = \overline{1,m}\right)$ Φ_k حلول المسألة (13) .

مبرهنة (5):

إذا كان للمؤثر B ، κ قيمة خاصة سالبة حيث $\kappa \geq 1$ عندئذٍ حلول المسألة $(1)-(6)$ غير مستقرة.

البرهان:

إذا كان للمؤثر B ، κ قيمة خاصة سالبة عندئذ للمسألة (19) κ قيمة خاصة سالبة $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_\kappa < 0$ وذلك استناداً إلى $(1.4.4),(1.4.5)$ في $[3]$.

ولكون $\kappa \geq 1$ فرضاً، أي أنّه يوجد على الأقل قيمة خاصة سالبة، فإنه يوجد تواتر موافق لهذه القيمة الخاصة $\omega_1 = \pm\sqrt{\lambda_1}$ ويوجد على الأقل عنصر خاص $\xi \exp(i\left|\omega_1\right|t)$ يتزايد تبعاً للزمن، أي أنّ حلول المسألة $(1)-(6)$ غير مستقرة، والجملة الهيدروديناميكية المدروسة غير مستقرة في التقريب الخطي.

الاستنتاجات والتوصيات:

تلعب طرائق التحليل الدالي وبالأخص طريقة الإسقاط على فضاءات جزئية متعامدة في فضاء هلبرت دوراً كبيراً في حل المسائل المرتبطة بالجمل الهيدروديناميكية، بالإضافة إلى الدور المهم للنظرية الطيفية للمؤثرات في دراسة استقرار هذه الجمل، لذلك نوصي باستخدام هذه الطرائق في دراسة بعض المسائل المرتبطة بجمل هيدروديناميكية مشابهة حيث تتمثل هذه الدراسة في البرهان على وجود و وحدانية حل لها، واستقرار هذه الحلول.

References:

[1]KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G; NGO ZUY CAN. *Operators Methods in Linear Hydrodynamics:Evolution and Spectral Problem*.Nauka,Moscow,1989,159-181.

[2] MYSHKIS, A. D; BABSKII, V.G; ZHUKOV, M.Y; KOPACHEVSKII,N.D; SLOBOZHANIN,L.A; TYUPTSOV, A.D; *Methods of Weightlessness Hydromechanics* Naukova Dumka, Kiev , 1992, 261-316.

[3] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G .*Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics* Vol. 1: Self-adjoint Problems for Ideal Fluid, Birkh¨auserVerlag, Basel—Boston—Berlin, 2001,383.

[4] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G. *Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics*.Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids, Birkh¨auserVerlag, Basel—Boston—Berlin, 2003, 444.

[5] KOPACHEVSKY,N.D. *On Stability and Instability of small motions of Hydrodynamicalsystems*,Methods of Functional Analysis and topology .Vol. 13 (2007), no. 2, 152–168.

[6] Ali, Wadia. *Operator Approach in Solving the Problem of Small Motions of a System of Ideal Capillary Fluids*. Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies – Basic Science Series Vol. (33) No. (1) 2011, 65-76.

[7]KOPACHEVSKY, N.D;*On oscillation of a body with a cavity partially filled withheav ideal fluid: Theorems of existence , uniqueness and stability of strong solutions,* Zb.prac.Inst.mat.NANUkr, Kyiv, Vol .2,no.1,2005,158-194.