إيجاد الشروط اللازمة لوجود حل ذو موجة منعزلة مظلمة لمعادلة فاخنينكو- باركس ذات الأمثال المتغيرة مع لا خطية قانون الطاقة

د. رامز كروم*

(تاريخ الإيداع 27 / 7 / 2020. قُبِل للنشر في 20 / 9 /2020)

ملخّص

يهدف هذا البحث إلى ايجاد الشروط اللازمة لوجود حل ذو موجة منعزلة مظلمة لمعادلة فاخنينكو- باركس مع لا خطية قانون الطاقة ذات الأمثال التابعة للزمن باستخدام طريقة فرضية الحل الموجي. تم تحديد قيمة بارامتر لا خطية قانون الطاقة. أظهرت النتائج أن الطريقة المستخدمة فعالة للحصول على هذا النوع من الحلول للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.

الكلمات المفتاحية: معادلة Vakhnenko-Parkes، موجة منعزلة مظلمة، طريقة فرضية الحل الموجي، لا خطية قانون الطاقة، أمواج بترددات عالية.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية. البريد الالكتروني: d.karroum.r@gmail.com

Finding the Necessary Conditions for the Existence of the Dark Soliton Solution to the Vakhnenko-Parkes Equation with Variable Coefficients and with Power Law Nonlinearity

Dr. Ramez Karroum*

(Received 27 / 7 / 2020. Accepted 20 / 9 /2020)

□ ABSTRACT □

This research aims to find the necessary conditions for the existence of the dark soliton solution to the Vakhnenko-Parkes equation with time dependent coefficients and with power law nonlinearity by using the solitary wave ansatz method. The value of the power law nonlinearity parameter is determined. The results show that the used method is efficient to obtain this kind of solutions for the nonlinear partial differential equations.

Keywords: Vakhnenko-Parkes equation, dark soliton, solitary wave ansatz method, power law nonlinearity, high frequency waves.

***Associate Professor - Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail: d.karroum.r@gmail.com**

مقدمة:

أصبحت حالياً المعادلات الموجية تلعب أكثر فأكثر دوراً هاماً في الفيزياء الرياضية وفي مختلف المجالات. تظهر هذه المعادلات الموجية في مجموعة واسعة من الحالات، مثل ميكانيكا الموائع، الألياف البصرية، علم الأحياء وعلم الحركة الكيميائية والكيمياء البيولوجية.

في الفيزياء والرياضيات يعرف السوليتون *(soliton)* على أنه موجة منفردة معززة ذاتياً (حزمة موجية أو نبضة) تحافظ على شكلها أثناء انتقالها بسرعة ثابتة، وينتج السوليتون عن إلغاء التأثيرات غير الخطية والمتفرقة في الوسط [1] وتم وصف هذه الظاهرة لأول مرة في عام1989 من قبل الباحث John Scott Russell في [2]. ومن أنواع السوليتون، السوليتون المظلم (dark Soliton) ويمثل الحل ذو الموجة المنعزلة المظلمة رياضياً بالتابع $tanh^p$ حيث p عدد صحيح موجب.

من المعادلات الموجية اللاخطية معادلة Vakhnenko، إذ تم تقديمها في عام 1992 في [3] وتصف هذه المعادلة الأمواج عالية التردد في وسط الارخاء، وأوجد لها حلولاً ذات طبيعة موجية [4] وتأخذ الشكل الآتي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)u+u=0 \qquad (1)$$

وقدم في عام 1998، كل من Parkes وVakhnenko الشكل المختزل لمعادلة استروفيسكي Ostrovsky [5] التي تأخذ الشكل:

$$uu_{xxt}-u_x u_{xt}+u^2 u_t=0 \qquad (2)$$

وتدعى هذه المعادلة بمعادلة Vakhnenko-Parkes. تم دراسة إيجاد حلول دقيقة لهذه المعادلة في العديد من الأبحاث، إذ استخدم Morrison وآخرون طريقة تحويلات Hirota-Backlund في [6]، كما استخدم Vakhnenko وآخرون طريقة الانتشار العكسية في [8,7] وكذلك تم استخدام طريقة الدالة الأسية في[9] من قبل Koroglu و Ozis، كما استخدم Abazari في [10] طريقة منشور G'/G. وفي عام 2015 استخدم Baskonus وآخرون في [11] طريقة تعويض معادلة برنولي التفاضلية العادية.

عرض Majid وآخرون في [12] نوع جديد من معادلة Vakhnenko-Parkes وهي Vakhnenko-Parkes مع لاخطية قانون الطاقة (power law nonlinearity) وتأخذ الشكل الآتي:

$$uu_{xxt}+au_x u_{xt}+bu^{2n}u_t=0 \qquad (3)$$

حيث a و b ثابتان حقيقيان غير صفريين و n عدد حقيقي ينتمي إلى $\mathbb{R}$ يسمى بارامتر لا خطية قانون الطاقة وعندما $a=-1\,,b=1\,,n=1$ لدينا معادلة Vakhnenko-Parkes (2).

ونظرا لقدرة المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية ذات المعاملات المتغيرة التابعة للزمن على وصف الظواهر بشكل أكثر واقعية من تلك ذات المعاملات الثابتة، لذلك سنتناول في هذا البحث معادلة Vakhnenko-Parkes ذات المعاملات المتغيرة التابعة للزمن مع لا خطية قانون الطاقة والتي تأخذ شكلاً أكثر عمومية من المعادلة (3):

$$\alpha(t)uu_{xxt}+\beta(t)u_x u_{xt}+\gamma(t)u^{2n}u_t=0 \qquad (4)$$

مع $\gamma(t)\,,\beta(t),\alpha(t)$ توابع حقيقية. إذ تعد المعادلة (3) حالة خاصة منها وذلك عندما $\gamma(t)=b\,,\beta(t)=a,\alpha(t)=1$.

سنحاول في هذا البحث تقديم الشروط اللازمة لوجود الحل ذو الموجة المنعزلة المظلمة لمعادلة Vakhnenko-Parkes مع لاخطية قانون الطاقة ذات الأمثال المتغيرة التابعة للزمن باستخدام طريقة فرضية الحل الموجي (solitary wave ansatz) المذكورة في المرجع [13] كما سنوجد هذا الحل.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى ايجاد الشروط اللازمة لإيجاد حل ذو موجة منعزلة مظلمة لمعادلة فاخنينكو- باركس مع لا خطية قانون الطاقة ذات الأمثال التابعة للزمن باستخدام طريقة فرضية الحل الموجي، إذ يعد هذا البحث غاية في الأهمية للباحثين في مجال الفيزياء الرياضية وخاصة للباحثين في ميكانيكا الموائع والألياف البصرية.

طرائق البحث ومواردە:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية وخاصة المعادلات التفاضلية الجزئية، إذ تعتمد التقنيات المستخدمة هنا على طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وعلى حل جمل المعادلات الجبرية وبرامج الحسابات الرياضية.

النتائج والمناقشة:

لنتوقع أن الحل $u(x,t)$ يأخذ الشكل الآتي:

$$u(x,t)=\lambda(t)\tanh^{p}\tau \qquad (5)$$

لنأخذ المتحول الموجي بالشكل المعمم الآتي:

$$\tau=B(t)(x-c(t).t) \qquad (6)$$

حيث $\lambda(t)$ و $B(t)$ و $c(t)$ توابع حقيقية مستمرة تمثل السعة والعرض العكسي وسرعة الموجة المنعزلة على الترتيب، سنقوم بتحديدها لاحقاً، وكذلك p عدد صحيح موجب سنحدده لاحقا من خلال عملية إيجاد الحل.

لنقوم في البداية بحساب المشتقات التي يجب أن نعوضها في المعادلة (4):

$$u_t=\frac{d\lambda}{dt}tanh^{p}\tau-p\lambda\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(B.c.t)}{dt}\right)(tanh^{p-1}\tau-\tanh^{p+1}\tau) \qquad (7)$$

$$u_x=pB\lambda(tanh^{p-1}\tau-\tanh^{p+1}\tau) \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}u_{xt}&=\left(\frac{d\lambda}{dt}pB+\lambda p\frac{dB}{dt}\right)(\tanh^{p-1}\tau-\tanh^{p+1}\tau)+\\&\lambda pB[(p-1)\tanh^{p-2}\tau-2p\tanh^{p}\tau+(p+1)\tanh^{p+2}\tau](x\frac{dB}{dt}-\frac{d(t.B.c)}{dt})\end{aligned} \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}u_{xxt}&=(pB^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda Bp\frac{dB}{dt})[(p-1)\tanh^{p-2}\tau-2p\tanh^{p}\tau+(p+1)\tanh^{p+2}\tau]\\&+B^2p\lambda[(p-1)(p-2)\tanh^{p-3}\tau-(3p^2-3p+2)\tanh^{p-1}\tau\\&+(3p^2+3p+2)\tanh^{p+1}\tau-(p+1)(p+2)\tanh^{p+3}\tau](x\frac{dB}{dt}-\frac{d(t.B.c)}{dt})\end{aligned} \qquad (10)$$

بتعويض العلاقات (5)−(10) في المعادلة (4)، نحصل على:

$$\begin{aligned}&\alpha(t).\lambda\left(pB^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda pB\frac{dB}{dt}\right)[(p-1)\tanh^{2p-2}\tau-2p\tanh^{2p}\tau\\&+(p+1)\tanh^{2p+2}\tau]+\alpha(t)\lambda^2pB^2[(p-1)(p-2)\tanh^{2p-3}\tau\end{aligned}$$

$$+(3p^2+3p+2)\tanh^{2p+1}\tau-(p+1)(p+2)\tanh^{2p+3}\tau]\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(t.B.c)}{dt}\right)$$
$$+\beta(t)\lambda pB\left(pB\frac{d\lambda}{dt}+\lambda p\frac{dB}{dt}\right)(\tanh^{2p-2}\tau-\tanh^{2p}\tau)$$
$$-\beta(t)\lambda pB\left(pB\frac{d\lambda}{dt}+\lambda p\frac{dB}{dt}\right)(\tanh^{2p}\tau-\tanh^{2p+2}\tau)$$
$$+\beta(t)\lambda^2p^2B^2[(p-1)\tanh^{2p-3}\tau-2p\tanh^{2p-1}\tau+(p+1)\tanh^{2p+1}\tau].$$
$$\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(t.B.c)}{dt}\right)-\beta(t)\lambda^2p^2B^2[(p-1)\tanh^{2p-1}\tau-2p\tanh^{2p+1}\tau$$
$$+(p+1)\tanh^{2p+3}\tau]+\gamma(t)\lambda^{2n}\frac{d\lambda}{dt}\tanh^{2np+p}\tau$$
$$+\gamma(t)\lambda^{2n+1}p(\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(t.B.c)}{dt}\right)(\tanh^{2np+p-1}\tau-\tanh^{2np+p+1}\tau)=0 \quad (11)$$

للموازنة بين $u^{2n}u_t$ مع uu_{xxt} نساوي القوتين $2np+p+1$ و $2p+3$، فنحصل على:

$$2np+p+1=2p+3 \quad (12)$$

فنحصل على:

$$p=\frac{2}{2n-1} \quad (13)$$

وبالتالي حتى تكون $p>0$ يجب أن يكون $n>\frac{1}{2}$ وبالتالي حتى يوجد الحل ذو الموجة المنعزلة المظلمة يجب أن يكون $n>\frac{1}{2}$.

لدينا أمثال قوى $\tanh\tau$ كما يأتي:

$$\tanh^{2p-2}\tau:\alpha(t)\lambda(t)\left(pB^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda pB\frac{dB}{dt}\right)(p-1)+\beta(t)\lambda p^2B(B\frac{d\lambda}{dt}+\lambda\frac{dB}{dt})$$
$$\tanh^{2p-3}\tau:(\alpha\lambda^2pB^2(p-1)(p-2)+\beta\lambda^2p^2(p-1)B^2)(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(t.B.c)}{dt})$$
$$\tanh^{2p-1}\tau:[-\alpha(t)(3p^2-3p+2)\lambda^2pB^2-2p^3\beta(t)\lambda^2B^2-\beta(t)\lambda^2p^2B^2(p-1)].\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(t.B.c)}{dt}\right)$$
$$\tanh^{2p}\tau:-2p^2\alpha\lambda\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)-2\beta(t)\lambda p^2B(B\frac{d\lambda}{dt}+\lambda\frac{dB}{dt})$$
$$\tanh^{2p+1}\tau:[\alpha(t)(3p^2+3p+2)\lambda^2pB^2+p^2(p+1)\beta(t)\lambda^2B^2+2\beta(t)\lambda^2p^3B^2].\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(t.B.c)}{dt}\right)$$
$$\tanh^{2p+2}\tau:\alpha p(p+1)\lambda\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)+\beta(t)\lambda p^2B(B\frac{d\lambda}{dt}+\lambda\frac{dB}{dt})$$
$$\tanh^{2p+3}\tau:[-\alpha(t)p(p+1)(p+2)\lambda^2B^2-\beta(t)p^2(p+1)\lambda^2B^2].\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(t.B.c)}{dt}\right)$$
$$\tanh^{2np+p-1}\tau:\gamma(t)\lambda^{2n+1}p\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(t.B.c)}{dt}\right)$$
$$\tanh^{2np+p}\tau:\gamma(t)\lambda^{2n}p\frac{d\lambda}{dt}$$
$$\tanh^{2np+p+1}\tau:-\gamma(t)\lambda^{2n+1}p\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(t.B.c)}{dt}\right)$$

بجعل أمثال التوابع $\tanh^{2p-3}$ و $\tanh^{2p-2}\tau$ و $\tanh^{2p-1}\tau$ و $\tanh^{2p}\tau$ وأمثال $\tanh^{2p+3}\tau$ مع $\tanh^{2np+p+1}\tau$ وأمثال $\tanh^{2np+p-1}\tau$ وأمثال $\tanh^{2+2p}\tau$ مع أمثال $\tanh^{2np+p}\tau$ مساوية للصفر نحصل على المعادلات الآتية:

$$(15)[\alpha\lambda^2\lambda pB^2B(p-2)+\beta\lambda^2p^2B^2](p-1)\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(t.B.c)}{dt}\right)=0 \quad (14)$$
$$\alpha\lambda(p-1)\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)+\beta p^2\lambda B\left(B\frac{d\lambda}{dt}+\lambda\frac{dB}{dt}\right)=0$$
$$[-\alpha(3p^2-3p+2)\lambda^2pB^2-2\beta p^3B^2\lambda^2-\beta\lambda^2B^2p^2(p-1)].$$

$$.\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(B.c.t)}{dt}\right)=0 \tag{16}$$

$$-2p^2\alpha\lambda\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)-2\beta\lambda p^2B\left(B\frac{d\lambda}{dt}+\lambda\frac{dB}{dt}\right)=0 \tag{17}$$

$$\alpha p(p+1)\lambda\left(B^2\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)+\beta p^2\lambda B\left(B\frac{d\lambda}{dt}+\lambda\frac{dB}{dt}\right)+\gamma\lambda^{2n}\frac{d\lambda}{dt}=0 \tag{18}$$

$$[\alpha(3p^2+3p+2)\lambda^2pB^2-\beta p^2(p+1)B^2\lambda^2+2\beta\lambda^2B^2p^3+\gamma\lambda^{2n+1}p].$$

$$.\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(B.c.t)}{dt}\right)=0 \tag{19}$$

$$[-\alpha p(p+1)(p+2)\lambda^2B^2-\beta p^2(p+1)\lambda^2B^2-\gamma\lambda^{2n+1}p]\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(B.c.t)}{dt}\right)=0 \tag{20}$$

من العلاقة (16) إذا كان:

$$-\alpha p\lambda^2B^2(3p^2-3p+2)-2\beta p^3B^2\lambda^2-\beta\lambda^2B^2p^2(p-1)=0$$

فإن:

$$-\alpha(3p^2-3p+2)-2\beta p^2-\beta p(p-1)=0$$
$$-\alpha(3p^2-3p+2)-\beta(2p^2+p^2-p)=0$$
$$-\alpha(3p^2-3p+2)-\beta(3p^2-p)=0$$
$$\alpha(t)=-\frac{3p^2-p}{3p^2-3p+2}\beta(t) \tag{21}$$

بالتعويض في (17) نحصل على:

$$(\alpha+\beta)\frac{d\lambda}{dt}B=-(2\alpha+\beta)\lambda\frac{dB}{dt}$$

ومنه نجد:

$$\frac{dB}{dt}\lambda=-\frac{-2p+2}{-3p^2-p+2}\frac{d\lambda}{dt}B \tag{22}$$

بتعويض (22) في (15) نحصل على:

$$-\frac{3p^2-p}{3p^2-3p+2}\beta(p-1)\left(B\frac{d\lambda}{dt}-2\frac{-2p+2}{-3p^2-p+2}B\frac{d\lambda}{dt}\right)+\beta p\left(B\frac{d\lambda}{dt}-\frac{-2p+2}{-3p^2-p+2}B\frac{d\lambda}{dt}\right)=0$$

$$[-\frac{3p^2-p}{3p^2-3p+2}(p-1)\left(1+\frac{4p-4}{-3p^2-p+2}B\frac{d\lambda}{dt}\right)+p\left(1+\frac{2p-2}{-3p^2-p+2}\right)]B\frac{d\lambda}{dt}=0$$

$$\frac{p(3p-1)}{3p^2+p-2}\frac{d\lambda}{dt}=0$$

$$\frac{d\lambda}{dt}=0\Longrightarrow\lambda=\lambda_0 \tag{23}$$

أي أن السعة ثابتة.

وبالتعويض في (22) نجد أن:

$$\frac{dB}{dt}=0\Longrightarrow B=B_0 \tag{24}$$

ومنه:

أي أن العرض العكسي للموجة ثابت وهذا ما يعطي الموجة السوليتونية.

بالعودة إلى العلاقة (16) لنفرض أن:

$$x\frac{dB}{dt}-\frac{d(B.c.t)}{dt}=0$$

وبما أن $c(t)$ تابع فقط لِ t فيجب أن يكون $\frac{dB}{dt}=0$ وهذا يعطي العلاقة (24) لكن في هذه الحالة لدينا:

$$\frac{d(B.c.t)}{dt}=0\Longrightarrow c(t)=\frac{c_0}{tB_0}$$

وبالتعويض في المتحول الموجي نجد أن τ يتبع فقط لِ x لذلك فإن هذا الخيار مرفوض أي أن:

$$x\frac{dB}{dt}-\frac{d(B.c.t)}{dt}\neq0 \tag{25}$$

الآن بتعويض (21) و (25) في (14) نجد أن $p = 1$ وحتى يكون $p = 1$ يجب أن يكون $n = \frac{3}{2}$ وبالتالي حتى يكون للمعادلة المعطاة حلول من نوع dark سوليتون يجب أن يكون $n = \frac{3}{2}$ و $\alpha(t) = -\beta(t)$ أيضاً

وبالتعويض في (9) مع مراعاة العلاقة (25) نحصل على:

$$-6\alpha\lambda^2B^2 - 2\beta\lambda^2B^2 - \gamma\lambda^{2n+1}p = 0$$

$$B^2(-6\alpha - 2\beta) = \gamma\lambda^{2n-1}$$

$$B^2(4\beta(t)) = \gamma\lambda^{2n-1}$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{\frac{\gamma\lambda^{2n-1}}{4\beta(t)}} \tag{26}$$

أي أن شروط وجود الحل ذو الموجة المنعزلة المظلمة (dark soliton) هو أن يكون $\gamma.\beta > 0$ وأن ثابت $= \frac{\gamma(t)}{\beta(t)}$.

وبالتالي يكون الحل ذو الموجة المنعزلة المظلمة:

$$u(x,t) = \lambda_0 \tanh(\lambda_0\sqrt{\frac{\gamma(t)}{4\beta(t)}}(x - c(t).t)) \tag{27}$$

نلاحظ أن الحل المعطى في العلاقة (27) هو ذاته الحل الموجود في المرجع [12] من أجل $\alpha(t) = 1$ و $\beta(t) = a$ و $\gamma(t) = b$.

5- الاستنتاجات والتوصيات:

قدمنا في هذا البحث الشروط اللازمة لوجود حل ذو موجة منعزلة مظلمة (dark soliton) لمعادلة Vakhnenko-Parkes مع لاخطية قانون الطاقة وحددنا الدرجة n التي من أجلها يوجد هذا النوع من الحلول وكانت $n = \frac{3}{2}$. بينت الدراسة مدى فعالية الطريقة المستخدمة للحصول على حل ذو موجة منعزلة مظلمة. ونأمل أن تشكل الشروط مع الحلول عوناً للباحثين العاملين في مجال الفيزياء الرياضية.

6- References:

[1] ABLOWITZ, M.J. *Nonliniear Dispersive Waves: Asymptotic Analisis and solitons*. Cambridge University Press, New York, 2011.

[2] DRAZIN, P.G, JOHNSON, R.S. *Solitons: An Introduction*. Cambridge University Press 1989. XII, 226 pp.

[3] VAKHNENKO, V. A. *Solitons in a nonlinear model medium*, Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 25, no. 15, 1992, pp. 4181–4187.

[4] VAKHNENKO, V. O. *High-frequency soliton-like waves in a relaxing medium*, Journal of Mathematical Physics, vol. 40, no.4, 1999, pp. 2011–2020.

[5] OSTROVSKY, L. A. *Nonlinear internal waves in a rotating ocean*, Oceanology, vol. 18, 1978, pp. 119–125.

[6] MORRISON, A. J. PARKES, E. J. and VAKHNENKO, V. O. *The N loop soliton solution of the Vakhnenko equation*, Nonlinearity, vol. 12, no. 5, 1999, pp. 1427–1437.

[7] VAKHNENKO, V. O. PARKES, E. J. and MICHTCHENKO, A. V. *The Vakhnenko equation from the viewpoint of the inverse scattering method for the KdV equation*, International Journal of Differential Equations and Applications, vol. 1, no. 4, 2000 pp. 429–449.

[8] VAKHNENKO, V. O. and PARKES, E. J. *The calculation of multisoliton solutions of the Vakhnenko equation by the inverse scattering method*, Chaos, Solitons & Fractals, vol. 13, no. 9, 2002, pp. 1819–1826.

[9] KOROGLU, C. and OZIS, T. *A novel traveling wave solution for Ostrovsky equation using exp-function method*, Computers and Mathematics with Applications, vol. 58, no. 11-12, 2009, pp. 2142–2146.

[10] ABAZARI, R. *Application of (G′/G)-expansion method to travelling wave solutions of three nonlinear evolution equation*, Computers & Fluids. An International Journal, vol. 39, no. 10, 2010, pp. 1957–1963.

[11] BASKONUS, H. M. BULUT, H. and EMIR. D. G. *Regarding New Complex Analytical Solutions for the Nonlinear Partial Vakhnenko-Parkes Differential Equation via Bernoulli Sub-Equation Function Method.* Mathematics Letters.Vol. 1, No. 1, 2015, pp. 1-9.

[12] MAJID, F. TRIKI, H. HAYAT, T. ALDOSSARY, OM. BISWAS, A. *Solitary wave solutions ofthe Vakhnenko-Parkes equation*. Nonlinear Anal 17(1), 2012, pp 60–66.

[13] BISWAS A. *1-Soliton solution of the K(m,n) equation with generalized evolution*, Phys Lett A (2008); 372:4601–2.