The Sharp Estimation of Functional $Re(z\,f')$ in The Generalized Caratheodory Class

Alaa Tonb [*]
Dr. Hassan Baddour [**]
Dr. Wadii Ali [***]

(Received 29 / 4 / 2026. Accepted 29 / 6 / 2026)

□ ABSTRACT □

This paper is concernrd with the precise determination of certain linear functional defiend on the generalized Caratheodory class, i.e the class of of analytic functions in the unit disc $|z|<1$ that admit a Riemann-Stieltijes integral representation of the form: $f(z)=\int_0^{2\pi} q(z,t)d\mu(t)$ with a kernel $q(z,t)=\frac{1+\beta e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}$ where: $\mu(t)$ is a non-decreasing function on the interval $[0,2\pi]$ and satisfes the condition $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ and α , β are some arbitrary on the interval $[0,1]$, This class is denoted by C_α^β,

The main focus of the investigation is the determination of the range of variability of the functional $F(f)=z\hat{f}(z)\ \ f\epsilon C_\alpha^\beta,\ \ in\ some\ point\ \ z=z_0$ fixed but arbitrary in the unit disk.

It has been shown that the convex hull of the domain of the range of variability of the functional is generated by the derivative of the kernel at the point $z=z_0$

In addition, the estimation for lower and upper bounds of $Re(zf'(z))$ are established by By proving the following inequalities

$$\frac{-(\beta+\alpha)r}{(1+\alpha r)^2}\le Re(zf'(z))\le\frac{(\beta+\alpha)r}{(1-\alpha r)^2}\ \text{ for } \alpha r\le 2-\sqrt{3}$$

The sharpness of the inequalities holds. The extremal function is $f^*(z)=(1\mp\beta z)/(1\mp\beta z)$,the equalities holds from wright when $t=0$ and from left when $t=\pi$.

Key Words: Range of variability - convex hull- Functional.

Copyright **:**Latakia University Journal (Formerly Tishreen) -Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

[*] **Master's student, Faculty of Science, Latakia University(Formerly Tishreen), Latakia, Syria. alaatonb@gmail.com**
[**] **Professor, Faculty of Science, Latakia University(Formerly Tishreen), Latakia-Syria. hassanbaddour@gmail.com**
[***] **Professor, Faculty of Science, Latakia University(Formerly Tishreen), Latakia, Syria. ,wadiaali@mail.ru**

التقدير الدقيق لقيم الدالي $Re(z\ f')$ في صف كاراتيودوري المعمم

الاء طنب [*]

د. حسن بدور [**]

د. وديع علي [***]

(تاريخ الإيداع29 / 4 / 2026. قبل للنشر في 29 / 6/ 2026)

☐ ملخّص ☐

يتناول هذا البحث التحديد الدقيق لمجموعة قيم بعض الداليات الخطية في صف كاراتيودوي المعمم والذي يرمز له بالرمز C_α^β وهو صف التوابع التحليلية f في قرص الواحدة $|z|<1$ التي تقبل عناصره التمثيل التكاملي من نوع ريمان ستلجس الذي له الشكل $f(z)=\int_0^{2\pi} q(z,t)\,d\mu(t)$ بنواة قدرها $q(z,t)=\frac{1+\beta e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}$ حيث α و β عددان ثابتان ولكنهما كيفيان ضمن المجال $[0,1]$ و $\mu(t)$ تابع غير متناقص ضمن المجال $[0,2\pi]$ويحقق الشرط $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$. في هذا البحث تمت بشكل أساسي دراسة مجموعة تغير قيم الدالي $F(f)=zf'(z)$ في الصف C_α^β وذلك في نقطة ما $z=z_0$ مثبتة ولكنها كيفية من قرص الواحدة. بالاعتماد على خواص الغلاف المحدب، وعلاقته بالتمثيل التكاملي للدوال تم الإثبات أن الغلاف المحدب لمجموعة قيم الدالي $zf'(z)$ متعلق بمشتق النواة في النقطة $z=z_0$ ، من أجل $|z_0|=r<1$. إضافة إلى ذلك تم الوصول إلى تحديد القيمتين الصغرى والعظمى للتابع الممثل بالقسم الحقيقي للدالي $zf'(z)$ في النقطة $z=z_0$ من خلال إثبات صحة التقدير الممثل بجملة المتراجحتين: $\frac{-(\beta+\alpha)r}{(1+\alpha r)^2}\le Re(zf'(z))\le\frac{(\beta+\alpha)r}{(1-\alpha r)^2}$ في القرص $|z|\le r<1$ كما تم إثبات حدية التقدير(sharp estimation) في المتراجحتين أعلاه من الأدنى والأعلى من أجل $\alpha r\le 2-\sqrt{3}$ بمعنى أنه يوجد تابع f^* في الصف C_α^β تتحول من أجله المتراجحتان أعلاه إلى مساواة ، ويحدث ذلك من أجل التابع $f^*(z)=(1\mp\beta z)/(1\mp\beta z)$ حيث $z=re^{it}$ الذي ينتمي إلى الصف C_α^β وحيث تتم المساواة من اليمين في النقطة $t=0$ وتتم المساواة من اليسار في النقطة $t=\pi$ أي أن المتراجحتين دقيقتان ولا تقبلان التحسين.

الكلمات المفتاحية: مجموعة تغير- الغلاف المحدب- الدالي.

حقوق النشر : مجلة جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً)- سوريا، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب الترخيص CC BY-NC-SA 04

[*] طالبة ماجستير ،كلية العلوم، جامعة اللاذقية(تشرين سابقاً)، اللاذقية سوريا alaatonb@gmail.com .

[**] أستاذ ،كلية العلوم، جامعة اللاذقية، اللاذقية(تشرين سابقاً)، اللاذقية، سوريا. hassanbaddour@gmail.com

[***] أستاذ، كلية العلوم، جامعة اللاذقية، اللاذقية(تشرين سابقاً)، اللاذقية، سوريا. wadiaali@mail.ru

مقدمة:

ليكن E_q فضاء التوابع f التحليلية في قرص الواحدة ($D:|z|<1$) التي تقبل تمثيلاً تكاملياً من الشكل:

$$f(z)=\int_a^b q(z,t)\,d\mu(t)\quad,\quad \mu\in U[a,b] \qquad (1)$$

علماً أن النواة $q(z,t)$ تابع تحليلي بالنسبة للمتغير z في D من أجل كل t تنتمي إلى المجال $[a,b]$ و $U[a,b]$ هو مجموعة التوابع غير المتناقصة على المجال $[a,b]$ التي تحق الشرط $\mu(b)-\mu(a)=1$.

من خلال الإختيارات المختلفة للنواة $q(z,t)$ نحصل على صفوف جزئية مختلفة من E_q فمثلا عندما تكون النواة:

آ) $q(z,t)=\dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ و $[a,b]=[-\pi,\pi]$ نحصل على الصف C المعروف بصف كاراتيودوري

ب) $q(z,t)=\dfrac{1+e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}$ $[a,b]=[0,2\pi]$ و $|\alpha|<1$ نحصل على الصف المعروف بالصف C_α

ج) $q(z,t)=\dfrac{1+\beta e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}$ و $[a,b]=[0,2\pi]$ و $|\alpha|<1,|\beta|<1$ نحصل على الصف C_α^β المعروف بصف كاراتيودوري المعمم قيد الدراسة [5]في هذه الأطروحة.. وعلى مثل هذه الصفوف تتم دراسة وتحديد مجموعة تغير قيم الداليات العقدية عموماً ومنها الداليات الخطية التي لها الشكل :

$$F(f)=\sum_{k=0}^{n} a_k(z)\ f^{(k)}(z) \qquad (2)$$

وذلك في نقاط محددة z_0 ولكنها كيفية من قرص الواحدة D. وفي الصف E_q سيكون لهذا الدالي الشكل:

$$F(f)=\sum_{k=0}^{n} a_k(z)\int_a^b q^{(k)}(z)\,d\mu(t)=\int_a^b\left[\sum_{k=0}^{n} a_k(z)\,q^{(k)}(z,t)\right]d\mu(t) \qquad (3)$$

مع العلم أن $a_k(z),k=0,1,...n$ توابع مستمرة في قرص الواحدة.

وهناك مسائل كثيرة مشابهة في صفوف محتلفة مع طرائق كثيرة لمعالجتها ونتائج مختلفة يمكن الرجوع إليها في المراجع [1،2،3،6،8]

من الخواص الهامة والمعروفة في هذ الأسرة [1،7] :

خاصة1: إذا كان $f\in E_q$ و z_0 نقطة معطاة من قرص الواحدة و B مجموعة قيم الدالي :

$$F(f)=f(z_0)=\int_a^b q(z_0,t)\,d\mu(t)\ ,\quad \mu\in U[a,b]$$

فإن المجموعة B مغلقة ومترابطة ومحدبة ومنحني محيطها محدد بالمعادلة:

$$\Gamma: w(t)=q(z_0,t),\ \ a\le t\le b$$

ويمكن تعميم هذه لخاصة على الدالي الخطي (3) ولكن قبل ذلك سوف نحتاج إلى التعريف الآتي:

تعريف1: يعرف الغلاف المحدب (convex hull) لمجموعة ما B على أنه أصغر مجموعة محدبة تحوي هذه المجموعة ويرمز له أحياناً بالرمز $B = conv\,\Gamma$.

وعندئذ نحصل على المبرهنة الآتية [4]:

مبرهنة1[4]: تتألف مجموعة قيم الدالي الخطي (2) أي المجموعة B من الغلاف المحدب للمنحني Γ المعطى بالعلاقة :

$$\Gamma:\ w(z_0,t)=\sum_{k=0}^{n} a_k(z_0)\,q_z^{(k)}(z_0,t),\ a\le t\le b \qquad (4)$$

حيث z_0 نقطة مثبتة ولكنها كيفية في القرص الواحدة.

في هذا البحث سوف نستفيد من هذه المبرهنة لتحديد مجموعة تغير قيم الدالي (أو اختصاراً: مجموعة قيم الدالي) $F(f)=zf'(z)$ وبعض خواصه الأخرى في الصف C_α^β.

أهمية البحث وأهدافه:

هذا البحث هو متابعة لدراسات سابقة في المسائل القصوى المتعلقة بالداليات الخطية المعرفة على الساحة العقدية وتحديداً تلك التي تملك تمثيلاً تكاملياً من نوع ريمان – ستلجس من النوع (1). ويهدف البحث إلى التوصل لتحديد مجموعة تغير قيم بعض الداليات الخطية ومشتقاتها وخصوصاً الدالي $F(f)=z_0 f'(z_0)$. إضافة لذلك لهذه الدراسة أهمية أيضاً من ناحية تضمنها للكثير من المسائل المفتوحة على مستوى البحث العلمي والدراسات العليا.

طريقة البحث ومواده:

طريقة البحث المتبعة هي استخدام النظريات الأساسية المتعلقة بتحديد مستقرات الداليات وانعكاس ذلك على صفوف التوابع التي تملك تمثيلاً تكاملياً من الشكل (1)، حيث يمكن في هذه الحالة استخدام خواص تكامل ريمان – ستلجس والمبرهنة1 للحصول على بعض النتائج بسهولة.

المناقشة والنتائج:

ليكن $f\in C_\alpha^\beta$ أي ليكن:

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+\beta e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}\,d\mu(t),\qquad z\in D,\ \mu\in U[0,2\pi] \qquad (5)$$

حيث $-1\le\alpha,\beta\le 1$ و $U=U[0,2\pi]$ مجموعة التوابع غير المتناقصة على المجال $[0,2\pi]$ التي تحقق الشرط $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$. يدعى هذا الصف بصف كاراتيودوري المعمم [5]. وهو كما نلاحظ صف خاص من الصف E_q

سوف نستفيد من المبرهنة 1 لدراسة مستقر الداليات في الصف C_α^β . في هذا الصف يكون لمشتقات التابع (5) من مراتب عليا الشكل :

$$f^{(n)}(z)=\int_0^{2\pi}\frac{n!(\beta+\alpha)\alpha^{n-1}e^{int}}{(1-\alpha e^{it}z)^{n+1}}d\mu(t),\ n=1,2,....,\ f^{(0)}(z)=f(z)$$

وللتوابع $q_z^{(n)}(z,t)$ الشكل:

$$q_z^{(n)}(z,t)=\frac{n!(\beta+\alpha)\alpha^{n-1}e^{int}}{(1-\alpha e^{it}z)^{n+1}},$$

وبالتالي يكون للدالي (2) (أو (3)) الشكل:

$$F(f)=\sum_{k=0}^{n}a_k(z)\ f^{(k)}(z)=\int_0^{2\pi}[a_0(z)\frac{1+\beta e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}+\sum_{k=1}^{n}a_k(z)\frac{k!(\beta+\alpha)\alpha^{k-1}e^{ikt}}{(1-\alpha e^{it}z)^{k+1}}]d\mu(t)\ .\qquad(6)$$

وعندئذ وكنتيجة مباشرة للمبرهنة1 نحصل في الصف C_α^β على المبرهنة الآتية[4] :

مبرهنة2: إذا كانت التوابع $a_k(z),k=0,1,...n$ مستمرة في قرص الواحدة وB مجموعة قيم الدالي الخطي (6) في الصف C_α^β فإن الغلاف المحدب (convex hull) B للمنحني Γ يعطى بالعلاقة:

$$\Gamma:\ w(t)=a_0(z_0)\frac{1+\beta e^{it}z_0}{1-\alpha e^{it}z_0}+\sum_{k=1}^{n}a_k(z_0)\frac{k!(\beta+\alpha)\alpha^{k-1}e^{ikt}}{(1-\alpha e^{it}z_0)^{k+1}}\ .\qquad(7)$$

حيث z_0 نقطة معطاة كيفياً من قرص الواحدة و $0\le t\le 2\pi$.

مثال1: لإيجاد مجموعة تغير قيم الدالي :

$$F(f)=2i\ f(z)+f'(z),\ \ f\in C_\alpha^\beta$$

في النقطة $z_0=0$ نجد بحسب (7) أن معادلة المنحني Γ (الذي يمثل معادلة محيط الممجموعة B) هي:

$$w(t)=2i\frac{1+\beta e^{it}z_0}{1-\alpha e^{it}z_0}-i\frac{(\beta+\alpha)e^{it}}{(1-\alpha e^{it}z_0)^2},\ 0\le t\le 2\pi$$

وفي النقطة $z_0=0$ يكون $w(t)=2i-i(\beta+\alpha)e^{it}$ والمنحني Γ الناتج هو دائرة مركزها $2i$ ونصف قطرها $|\beta+\alpha|$. وبذلك يكون B الغلاف المحدب لهذه الدائرة هذه وهو القرص المغلق:

$$|w-2i|\le|\beta+\alpha|$$

الذي مركزه $2i$ ونصف قطره $|\beta+\alpha|$

نلاحظ إذاً أن مجموعة قيم الدالي (6) محددة بالغلاف المحدب للمنحني المعطى بالمعادلة (7) كحالة خاصة للمنحني(4).

ونلاحظ أيضاً بشكل عام أن المنحني Γ قد يتطابق ،إذا كان مغلقاً، مع محيط المجموعة المحدبة B كما في المثال1 أعلاه، ولكن ذلك عموماً لا يحدث إلا في حالات خاصة وبشروط معينة .

والسؤال المطروح الآن متى يتطابق محيط المجموعة B مع المنحني Γ ومن أجل أي داليات وفي أي صف أو فضاء؟

في هذا البحث نجيب جزئيا على هذا السؤال في الصف C_α^β من أجل الدالي $F(f)=z_0 f'(z_0)$. وسوف نفرض أن α و β موجبتان ولكن كيفيتان ضمن المجال $[0,1[$ الامر الذي يسهل الحسابات ولا يقلل من عمومية المسألة . وسوف نبدأ بإثبات المبرهنة الآتية:

مبرهنة3: إذا كانت B محموعة تغير الدالي:

$$F(f)=z_0 f'(z_0),\quad f\in C_\alpha^\beta,\ z_0=re^{it_0}\in D \tag{8}$$

كانت B الغلاف المحدب للمنحني Γ المعطى بالمعادلة:

$$w(\zeta)=\frac{(\beta+\alpha)\zeta}{(1-\alpha\zeta)^2},\ \zeta=re^{i\varphi},\varphi=t+t_0,t_0=arg z_0\ ,\ t_0\le\varphi\le 2\pi+t_0 \tag{9}$$

مع العلم أن: محيط المنطقة B محدد تماماً بالمنحني Γ إذا كان : $0<r\le\frac{2-\sqrt{3}}{\alpha}$, $2-\sqrt{3}<\alpha\le 1$

البرهان: من أجل الدالي (9) تختصر معادلة المنحني Γ بحسب (7) إلى الشكل

$$w(t)=z_0\frac{(\beta+\alpha)e^{it}}{(1-\alpha\, e^{it}z_0)^2}$$

وبوضع $z_0=re^{it_0}$, $\zeta=z_0e^{it}$ نحصل على المنحني بالشكل (7) أي بالشكل:

$$w(\varphi)=w(\zeta)=\frac{(\beta+\alpha)\zeta}{(1-\alpha\zeta)^2},\zeta=re^{i\varphi}\ ,\varphi=t+t_0$$

حيث يمكن أن نرمز اختصاراً: $w(z_0,\varphi)=w(\varphi)$

لدراسة تحدب المنطقة المحاطة بالمنحني Γ سوف ندرس تحدب صورة القرص $r<1$, $|\zeta|\le r$ من خلال التابع $w(\zeta)$ أعلاه وهو نفسه المعطى بالعلاقة (9) . من المعروف [9] أن الشرط اللازم والكافي لتحدب صورة هذا القرص عندما $\zeta=re^{i\varphi}$,$r\le\rho<1$ هو أن يتحقق الشرط:

$$1+\mathrm{Re}\,\zeta\frac{w''(\zeta)}{w'(\zeta)}\ge 0 \tag{10}$$

وبإجراء الحسابات:

$$w'(\zeta)=\frac{d}{d\zeta}\frac{(\alpha+\beta)\zeta}{(1-\alpha\zeta)^2}=(\alpha+\beta)\frac{1+\alpha\zeta}{(1-\alpha\zeta)^3}$$

$$w''(\zeta)=(\alpha+\beta)\frac{d}{d\zeta}\frac{1+\alpha\zeta}{(1-\alpha\zeta)^3}=(\alpha+\beta)\frac{4\alpha+2\alpha^2\zeta}{(1-\alpha\zeta)^4}$$

$$\frac{w''(\zeta)}{w'(\zeta)}=\frac{4\alpha+2\alpha^2\zeta}{1-\alpha^2\zeta^2}$$

وبالتعويض في (10) يجب أن يكون:

$$1+Re\,\zeta\frac{w''(\zeta)}{w'(\zeta)}=Re\left(1+\zeta\frac{4\alpha+2\alpha^2\zeta}{1-\alpha^2\zeta^2}\right)=Re\left(\frac{1+4\alpha\zeta+\alpha^2\zeta^2}{1-\alpha^2\zeta^2}\right)\ge 0$$

عندئذ وبعد حسابات بسيطة نجد أن:

$$Re\frac{1+4\alpha\zeta+\alpha^2\zeta^2}{1-\alpha^2\zeta^2}=\frac{(1-\alpha^2r^2)(1+4\alpha r\cos\varphi+\alpha^2r^2)}{|1-\alpha^2\zeta^2|^2}$$

حيث $\zeta=re^{i\varphi}$. وبالتالي يتحقق الشرط (10) عندما يكون:

$$1+4\alpha\, r\cos\varphi+\alpha^2r^2\geq 0 \qquad (11)$$

ويتحقق ذلك بشكل خاص عندما يكون $1\pm 4\alpha\, r+\alpha^2r^2\geq 0$. وبما أن

$$1-4\alpha\, r+\alpha^2r^2=\left[\alpha\, r-\left(2-\sqrt{3}\right)\right]\left[\alpha\, r-\left(2+\sqrt{3}\right)\right]\geq 0$$

فإن الشرط (11) (وبالتالي شرط التحدب (10)) يتحقق عندما يكون: $\alpha r-\left(2+\sqrt{3}\right)\geq 0$ و $\alpha\, r-\left(2-\sqrt{3}\right)\geq 0$ أو $\alpha r-\left(2+\sqrt{3}\right)\leq 0$ و $\alpha\, r-\left(2-\sqrt{3}\right)\leq 0$. ولكن الحل الأول مرفوض لأنه بموجبه سيكون $\alpha r>1$ ، وبالتالي يتحقق الشرط (11) عندما $\alpha\, r\leq\left(2-\sqrt{3}\right)$ أي عندما $0<r\leq\frac{2-\sqrt{3}}{\alpha}$ **أو**

$2-\sqrt{3}<\alpha\leq 1$ و $0<r<1$. نستنتج من ذلك أن منطقة تغير قيم الدالي (8) من أجل $0<r\leq\frac{2-\sqrt{3}}{\alpha}$ هو منطقة محدبة يحيط بها المنحني ذو المعادلة (9) وهو المطلوب .

ملاحظة

1- إذا كان $\alpha\, r>\left(2-\sqrt{3}\right)$ أي $\frac{2-\sqrt{3}}{\alpha}<r<1$ فإن شرط التحدب (10) يرتبط بالزاوية φ_0 التي تمثل حلاً للمعادلة $\cos\varphi=-\frac{1+\alpha^2r^2}{4\alpha r}$ دون أن تتطابق في هذه الحالة مجموعة تغير قيم الدالي مع المجموعة المحدبة B بالضرورة.

نتائج وتطبيقات:

من المبرهنة 3 ينتج مباشرة ما يلي:

نتيجة1. من أجل كل $f\in C_\alpha^\beta$ يكون:

$$|f'(z)|\leq\frac{(\alpha+\beta)}{(1-\alpha r)^2},\quad |z|=r<1 \qquad (12)$$

وهذا ناتج من أن المنحني (9) هو الغلاف المحدب لمجوعة قيم الدالي zf' حيث ينتج من ذلك أن:

$$|zf'(z)|\leq\left|\frac{(\beta+\alpha)\zeta}{(1-\alpha z)^2}\right|\leq\frac{(\beta+\alpha)|\zeta|}{(1-\alpha|\zeta|)^2}=\frac{(\beta+\alpha)r}{(1-\alpha r)^2}$$

فتحصل على النتيجة بقسمة الطرفين على $|\zeta|=|z|=r$.

سوف نبرهن اعتماداً على ما تقدم على صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة 4. من أجل كل تابع $f\in C_\alpha^\beta$ معطى بالعلاقة (5) إي بالعلاقة:

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+\beta\, e^{it}z}{1-\alpha\, e^{it}z}\,d\mu(t),$$

تكون صحيحة التقديرات الآتية::

$$\frac{-(\beta+\alpha)r}{(1+\alpha\, r)^2}\le Re(zf'(z))\le\frac{(\beta+\alpha)r}{(1-\alpha\, r)^2},\quad r\le\frac{2-\sqrt{3}}{\alpha}\ ,\ |z|=r<1 \qquad (13)$$

وهذه المتراجحات حدية، حيث تتحقق المساواة من أجل التابع $f(z)$ (المعطى بالعلاقة (5)) من اليمين عندما يكون $t+t_0=0$ و من اليسار عندما يكون $t+t_0=\pi$ ، علماً أن $t_0=arg\, z_0$

البرهان: سنبين أولا أن المتراجحة (13) من اليمين محققة. من النتيجة (12) لدينا مباشرة:

$$Re(zf'(z))\le|zf'(z)|\le\frac{(\beta+\alpha)|z|}{(1-\alpha|z|)^2}=\frac{(\beta+\alpha)r}{(1-\alpha r)^2} \qquad (14)$$

وعلينا أن نبرهن على صحة الطرف الايسر للمتراجحة. في سبيل ذلك نضع التابع (9) بالشكل الديكارتي: $w(\varphi)=u(\varphi)+iv(\varphi)$ حيث يكون:

$$w(\varphi)=u(\varphi)+iv(\varphi)=\frac{(\beta+\alpha)re^{i\varphi}}{(1-re^{i\varphi})^2},\ \varphi=t+t_0$$

فنحصل بعد ضرب البسط والمقام بمرافق المقام وإجراء الحسابات على القسمين الحقيقي والتخيلي بالشكل:

$$u(\varphi)=(\beta+\alpha)r\frac{(1+\alpha^2r^2)\cos\varphi-2\alpha\, r}{(1-2\alpha r\cos\varphi+\alpha^2r^2)^2}$$

$$v(\varphi)=(\beta+\alpha)r\frac{(1-\alpha^2r^2)\sin\varphi}{(1-2\alpha r\cos\varphi+\alpha^2r^2)^2}$$

علماً أن: $t_0\le\varphi\le2\pi+t_0$ وبما أن:

$$(1+\alpha^2r^2)\cos\varphi-2\alpha\, r\ge-(1+\alpha^2r^2)-2\alpha\, r=-(1+\alpha r)^2$$

$$(1-2\alpha r\cos\varphi+\alpha^2r^2)^2\le(1+2\alpha r+\alpha^2r^2)^2\le((1+\alpha r)^2)^2$$

فإن:

$$u(\varphi)\ge(\beta+\alpha)r\frac{-(1+\alpha r)^2}{(1+\alpha r)^4}\ge\frac{-(\beta+\alpha)r}{(1+\alpha r)^2}$$

وبالتالي:

$$Re(zf'(z))\ge\frac{-(\beta+\alpha)r}{(1+\alpha r)^2}\ ,|z|=r$$

بالمقارنة مع (14) نحصل على المتراجحة المطلوبة (13)

سنبين الآن أن التقديرات (13) دقيقة (أي حادة) بمعنى أنه يوجد تابع ما في الصف C_α^β تتغير من أجله المتراجحات هذه إلى مساواة في بعض النقاط. أي أن طرفي المتراجحة تتضمنان القيمة الصغرى والعظمى للتابع

$Re\,zf'(z)=u(\varphi)$. ويحدث ذلك في هذه الحالة في النقاط الي ينعدم فيه مشتق التابع $u(\varphi)$. بحساب المشتق نجد أن:

$$u'(\varphi)=(\beta+\alpha)\frac{d}{d\varphi}\,r\,\frac{(1+\alpha^2r^2)\cos\varphi-2\alpha\,r}{(1-2\alpha r\cos\varphi+\alpha^2r^2)^2}$$
$$=-(\beta+\alpha)r\sin\varphi\,\frac{(1+\alpha^2r^2)^2+2\alpha\,r(1+\alpha^2r^2)\cos\varphi-8\alpha^2r^2}{\left|1-re^{i\varphi}\right|^6}$$

وإذا رمزنا

$$A(\varphi)=(1+\alpha^2r^2)^2+2\alpha\,r(1+\alpha^2r^2)\cos\varphi-8\alpha^2r^2$$

يكون اختصاراً:

$$u'(\varphi)=-(\beta+\alpha)r\sin\varphi\ \frac{A(\varphi)}{\left|1-re^{i\varphi}\right|^6}$$

وعندئذ من العلاقة $u'(\varphi)=0$ نحصل على النقاط المرشحة للقيم القصوى للتابع من أجل $\varphi_0=0$ أو $\varphi_1=\pi$ أو φ_2 التي تحقق المعادلة $A(\varphi)=0$. وللتأكد من نوع القيم القصوى للتابع في هذه النقاط ندرس إشارة المشتق الثاني للتابع $u(\varphi)$ حيث يكون:

$$u''(\varphi)=-(\beta+\alpha)\,r\,\frac{\left[A(\varphi)\cos\varphi-2\alpha\,r(1+\alpha^2r^2)\sin^2\varphi\right]\left|1-re^{i\varphi}\right|^2-6\alpha\,rA(\varphi)\sin^2\varphi}{\left|1-re^{i\varphi}\right|^8}$$

فنجد من أجل $\varphi_0=0$ أن $\cos\varphi_0=1$ ويكون عندئذ :

$$u''(\varphi)=-(\beta+\alpha)\,rA(\varphi)\frac{\left|1-\alpha re^{i\varphi}\right|^2}{\left|1-\alpha re^{i\varphi}\right|^8}=-(\beta+\alpha)\,r\,\frac{A(\varphi)}{\left|1-\alpha re^{i\varphi}\right|^6}$$
$$=-(\beta+\alpha)\,r\,\frac{(1+\alpha^2r^2)^2+2\alpha\,r(1+\alpha^2r^2)\cos\varphi-8\alpha^2r^2}{\left|1-\alpha re^{i\varphi}\right|^6}$$

وعليه:

$$u''(0)=-(\beta+\alpha)\,r\,\frac{(1+\alpha^2r^2)^2+2\alpha\,r(1+\alpha^2r^2)-8\alpha^2r^2}{\left|1-\alpha r\right|^6}$$

ويعد ترتيب البسط نجد أن:

$$(1+\alpha^2r^2)^2+2\alpha\,r(1+\alpha^2r^2)-8\alpha^2r^2\ =(1-\alpha^2r^2)^2+2\alpha\,r(1-2\alpha\,r+\alpha^2r^2)>0$$

وبالتالي $u''(0)<0$. نستنتج من ذلك أن للتابع قيمة قصوى عظمى من أجل $\varphi_0=0$ هي:

$$u(0)=Re\,zf'(z)=(\beta+\alpha)\,r\,\frac{(1+\alpha^2r^2)-2\alpha\,r}{(1-2\alpha r+\alpha^2r^2)^2}=\frac{(\beta+\alpha)r}{(1-r)^2}$$

وكذلك من أجل $\varphi_1=\pi$ يكون $\cos\varphi_1=-1$ ويكون :

$$u''(\pi)=-(\beta+\alpha)r\frac{\left(1+\alpha^2r^2\right)^2-2\alpha\, r\left(1+\alpha^2r^2\right)-8\alpha^2r^2}{\left|1-\alpha r\right|^6}$$

ويعد ترتيب البسط نجد أن:

$$\left(1+\alpha^2r^2\right)^2-2\alpha\, r\left(1+\alpha^2r^2\right)-8\alpha^2r^2=(1+\alpha r)^2\left(1-4\alpha\, r+\alpha^2r^2\right)$$

وبالتالي $u''(\varphi_1)>0$ عندما $1-4\alpha\, r+\alpha^2r^2>0$ إي عندما $\alpha\, r\le\left(2-\sqrt{3}\right)$. وهذا يتفق مع الشرط $\alpha r\le 2-\sqrt{3}$ (الوارد في العلاقة (11)) . في هذه الحالة للتابع u قيمة قصوى صغرى من أجل $\varphi_1=\pi$ هي:

$$u(\pi)=Re\, zf'(z)=(\beta+\alpha)r\frac{-\left(1+\alpha^2r^2\right)-2\alpha\, r}{\left(1+2\alpha r+\alpha^2r^2\right)^2}=-\frac{(\beta+\alpha)r}{(1+\alpha r)^2}$$

وينتج من ذلك أم المتراجحتين في (13) دقيقتان ولا يقبلان التحسين

أما التابع الذي تتحول من أجله االمتراجحة (13)إلى مساواة فهو التابع $f(z)\in C_\alpha^\beta$ الذي يكون من أجله $t=0$ أو $t=\pi$

أي مثلاً التابع:

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1\mp\beta\, z}{1\pm\alpha\, z}\,d\mu(t)=\frac{1\mp\beta\, z}{1\pm\alpha\, z}\in C_\alpha^\beta$$

في هذه الحالة يكون التابع حقيقيا على المحور الحقيقي ($z=\mp r$) وتكون قيمة الدالي في الحالة الاولى $(t=0)$:

$$Re\left[zf'(z)\right]=z\frac{(\beta+\alpha)z}{(1-\alpha\, z)^2}=\frac{(\beta+\alpha)r}{(1-\alpha\, r)^2},\ z=r$$

وهذا يتطابق مع الحد الأعلى للمتراجحة (13) . وفي الحالة الثانية ($t=\pi$) تكون قيمة الدالي:

$$Re\left[zf'(z)\right]=z\frac{(\beta+\alpha)z}{(1+\alpha\, z)^2}=-\frac{(\beta+\alpha)r}{(1+\alpha\, r)^2},\ z=r$$

وهذا يتطابق مع الحد الأدنى للمتراجحة (13)

الاستنتاجات والتوصيات:

تم إيجاد مجموعة قيم الداليات بعض الخطية في الصف C_α^β كصف خاص من الصف E_q . ونتيجة للحقيقة

$$C\subset C_\alpha\subset C_\alpha^\beta\subset E_q$$

فإن إي نتائج في صف منها ستكون صحيحة في الصف الذي يسبقه. فمثلاً التقديرات (13) التي حصلنا عليها في الصف C_α^β والتي كان لها الشكل:

$$\frac{-(\beta+\alpha)r}{(1+\alpha\, r)^2}\le Re(zf'(z))\le\frac{(\beta+\alpha)r}{(1-\alpha\, r)^2},\quad r\le\frac{2-\sqrt{3}}{\alpha}\quad,\ |z|=r<1$$

تنقل مباشرة كنتجية في الصفين C_α و C . فإذا كان $f\in C_\alpha$ أي إذا كان $\beta=1$ فإن:

$$\frac{-(1+\alpha)r}{(1+\alpha\, r)^2}\le Re(zf'(z))\le\frac{(1+\alpha)r}{(1-\alpha\, r)^2},\quad r\le\frac{2-\sqrt{3}}{\alpha}\quad,\ |z|=r<1$$

وإذا كان $f \in C$ أي إذا كان $\alpha = \beta = 1$ فإن:

$$\frac{-2r}{(1+r)^2} \le Re(zf'(z)) \le \frac{2r}{(1-r)^2}, \quad r \le 2-\sqrt{3} \ , \ |z| = r < 1$$

بالإمكان إذاً متابعة هذه الدراسات في الفضاء E_q وفي فضاءاته الجزئية لإيجاد مجموعات تغير قيم الداليات الخطية الاعم وخصوصاً تلك المتعلقة بالمشتقات من درجات أعلى. فمثلاً بالإمكان البحث عن مجموعة تغير قيم الداليات من الشكل:

$$F(f) = z_0 f''(z_0), F(f) = z_0 f^{(n)}(z_0), \ldots$$

وما يرافقها من تقديرات قصوى لمقادير حقيقية مثل:

$$Im[z_0 f'(z_0)], Re[z_0 f''(z_0)].\ Im[z_0 f''(z_0)], \ldots$$

References:

[1] I. Aleksandrov, "Boundary values of functionals on the class of holomorphic functions univalent in a circle,* Sib. Math. J* vol. 4, pp. 17–31, (1963).

[2] M. Ayash, H. Baddour, and A. Kareem, "New subclasses of bi-univalent functions associated with exponential functions,* Baghdad Sci. J*, early access, Jun. 2024, doi: 10.21123/bsj.(2024).9954.

[3] T. K. Babalola and K. O. Opoola, "Iterated integral transforms of Carathéodory functions and their applications to analytic and univalent functions,* Tamkang J. Math.*, vol. 37, no. 4, pp. 355–366, (2006).

[4] H. Baddour, "The set of values of functionals in classes of functions possessing a structural representation,* Jordan J. Math. Stat* vol. 1, no. 1, in arabic (2008).

[5] H. Baddour, "The boundary properties of some functionals in class $C(\alpha,\beta)$ *Tishreen Univ. J* Res. Sci. Stud. – Basic Sci. Ser., vol. 36, no. 6,in Arabic (2014).

[6] D. Khavinson and M. Stessin, "Certain linear extremal problems in Bergman spaces of analytic functions,* Indiana Univ. Math. J*, vol. 46, no. 3, pp. 933–974, (1997).

[7] J. Krzyz, Theory and Problems in Analytic Functions. Warsaw, Poland: PWN, 1975.

[8] M. Nunokawa and E. Y. Duman, "Properties of functions concerned with Carathéodory functions,* Ann. UMCS, Sect. A* vol. 67, no. 2, pp. 33–41, (2013).

[9] C. Pommerenke, Univalent Functions. Göttingen, Germany: Vandenhoeck & Ruprecht, (1975).