Calculating The Star Chromatic Number for Jahangir Graphs And Limon Graphs

Khaled Alshehada*
Dr. Hamdo Alnajar **

(Received 10 / 2 / 2026. Accepted 13 / 4 / 2026)

□ ABSTRACT □

The field of graph coloring has witnessed notable interest, particularly with the introduction of new conditions and constraints that increase the complexity of the problem and broaden its diverse applications in computer science and network theory. Among the most prominent types of coloring are distance coloring with distance 2 [2], star coloring [3,5], and acyclic coloring [7,5], which requires that the graph be free of bi-chromatic cycles. These studies reflect the importance of the graph coloring problem as an applied research area.

This paper focuses on star coloring (coloring without bi-chromatic P_4 paths). Attention is given to specific classes of graphs, and the values of the star chromatic number $\chi_s(G)$ are determined for some of these graphs. In particular, the star chromatic number $\chi_s(G)$ is computed for Jahangir graphs $\boldsymbol{J_{2,m}}$, Lemon graphs, and the Firecracker graph $\boldsymbol{F_{m,n}}$ in the case $n = 3$.

Keywords: Graph coloring, star coloring, Jahangir graph, chromatic number.

Copyright **:**Latakia University Journal (Formerly Tishreen) -Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

* **PhD student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Aleppo University, Aleppo, Syria. Khaled.shehada.math@gmail.com / https://orcid.org/0009-0000-6815-3650**
** **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Aleppo University, Aleppo, Syria.**

حساب العدد اللوني النجمي لبيانات جاهانجير وبيانات ليمون

خالد الشحادة*

د. حمدو النجار**

(تاريخ الإيداع10 / 2 / 2026. قبل للنشر في 13 / 4 / 2026)

□ ملخّص □

شهد مجال تلوين البيانات اهتماما ملحوظًا، خاصة مع إضافة شروط وقيود جديدة تزيد من تعقيد المسألة وتوسع من تطبيقاتها المتنوعة في علوم الحاسوب والشبكات. من أبرز انواع التلوين هو التلوين مع شرط المسافة $distance$ [2]، والتلوين النجمي star coloring [3,5]، والتلوين اللاحلقي acyclic coloring [7,5] الذي يشترط خلو البيان من دورات (cycles) ثنائية اللون. هذه الدراسات تعكس أهمية مسألة تلوين البيان كمسألة تطبيقية. يتناول هذا البحث التلوين النجمي star coloring (تلوين بدون مسارات P_4 ملونة بلونين). لقد تم التركيز على أنواع محددة من البيانات، وتم تحديد قيم العدد اللوني النجمي $\chi_s(G)$ لبعض هذه البيانات. حيث تم حساب العدد اللوني النجمي $\chi_s(G)$ لبيانات جاهانجير $\boldsymbol{J_{2,m}}$، وبيانات ليمون Lemon graphs، وايضاً لبيان Firecracker $\boldsymbol{F_{m,n}}$ في حالة $n = 3$.

الكلمات المفتاحية: تلوين البيان، التلوين النجمي، بيان جاهانجير، العدد اللوني.

حقوق النشر : مجلة جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً)– سورية، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب الترخيص CC BY-NC-SA 04

* **طالب دكتوراه ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حلب، حلب، سوريا.**
Khaled.shehada.math@gmail.com https://orcid.org/0009-0000-6815-3650
** **أستاذ ، قسم الرياضيات، ، كلية العلوم، جامعة حلب، حلب، سوريا.**

مقدمة:

تُعدّ نظرية البيان فرعًا حيويًا من فروع الرياضيات المتقطعة، وتجد تطبيقاتها في شتى المجالات، بدءًا من علوم الحاسوب وهندسة الشبكات وصولًا إلى الجدولة وتوزيع المهام وتمثيل المركبات الكيميائية. من اهم المسائل المدروسة في نظرية البيان هي مسألة تلوين البيانات. تتلخص هذه المسألة في تخصيص ألوان للرؤوس (vertices) في البيان بحيث لا يتشارك أي رأسين متجاورين (متصلين بضلع) بنفس اللون. الهدف هو تحقيق ذلك بأقل عدد ممكن من الألوان، وهو ما يُعرف بـ "العدد اللوني" للبيان chromatic number.

على الرغم من وضوح المفهوم، فإن تلوين البيانات يُعَدّ تحديًا حسابيًا معقدًا، وينتمي إلى فئة مسائل NP–hard [1]. هذا يعني أنه لا توجد خوارزمية فعّالة معروفة يمكنها إيجاد الحل الأمثل لجميع البيانات الكبيرة في وقت معقول. ومع ذلك، فإن أهمية هذه المسألة تكمن في قدرتها على نمذجة العديد من المشكلات الواقعية. على سبيل المثال، يمكن استخدام تلوين البيانات لجدولة الفصول الدراسية (حيث تمثل الفصول رؤوساً ونصل بضلع بين كل حصتين لهما نفس التوقيت)، أو لتخصيص ترددات الراديو (حيث تمثل المحطات رؤوساً والاضلاع تربط بين المحطات المتجاورة). [1]

في السنوات الأخيرة، شهد مجال تلوين البيانات تطورًا كبيرًا، حيث تجاوز الباحثون المسألة الأساسية ليقدموا أنواع متقدمة من التلوين تُضيف شروطًا وقيودًا إضافية على عملية التلوين. هذه القيود المُستحدثة لا لتزيد من تعقيد المشكلة فقط، بل تُمكن أيضًا من نمذجة العديد من المسائل بشكل أكثر دقة وواقعية. ومن أبرز أنواع التلوين:

التلوين مع شرط المسافة (Distance Coloring): حيث لا تقتصر القيود على الرؤوس المتجاورة فقط لكنها تمتد لتشمل الرؤوس التي تقع على مسافة محددة من بعضها البعض داخل البيان. يُستخدم هذا النوع في نمذجة مشاكل مثل تخصيص الترددات اللاسلكية حيث يتطلب الأمر فصلًا أكبر بين المحطات القريبة لتجنب تداخل الترددات. [2]

التلوين اللاحلقي (Acyclic Coloring): يهدف هذا التلوين إلى ضمان خلو البيان من أي دورات cycles، تكون جميع رؤوسها ملونة فقط بلونين، أي أن كل دورة يجب ان تتلون رؤوسها بثلاثة ألوان على الاقل. يجد هذا النوع من التلوين تطبيقاته في مجالات مثل نمذجة الشبكات العصبية أو تحليل تدفق البيانات حيث يُعدّ تجنب الدورات ثنائية اللون أمرًا مهماً. [3]

تُشكل هذه الأنواع من التلوين نقطة انطلاق لأبحاث أكثر تخصصًا، حيث تهدف إلى فهم خصائصها وتطوير خوارزميات لإيجاد الحلول المثلى أو التقريبية لها من أجل صفوف مختلفة من البيانات. نقوم في هذا البحث بدراسة التلوين النجمي لبعض البيانات.

توجد الكثير من الدراسات التي تناولت موضوع التلوين النجمي، حيث بدأ هذا الاهتمام بالتزايد بسبب الأهمية التطبيقية للتلوين النجمي في الحساب العلمي التوافقي (combinatorial scientific computing) [4]، حيث أن التلوين النجمي له علاقة بإيجاد محددات هيسيان وجاكوبيان للتوابع [6]، [5].

درس Fertin وآخرون [7] المسألة بحالة التلوين النجمي وأوجدوا حداً أعلى بدلالة الدرجة الأكبر بالبيان $\Delta(G)$:

$$\chi_s(G) \leq \lceil 20\Delta^{3/2} \rceil$$

تم تحسين الحد الأعلى السابق بواسطة الباحث Ndreca وآخرون [8] ليصبح:

$$\chi_s(G) \leq \lceil 4.34\Delta^{3/2} \rceil$$

درس T. Han وآخرون [9] المسألة في حالة التلوين النجمي وذلك لأجل الجداء الديكارتي للمسار P_n مع دورة C_m:

$$\chi_s(P_n \square C_m) = \begin{cases} 4; if\ m\ is\ even\ and\ n = 3, \\ 5; Otherwise. \end{cases}$$

أيضاً من أجل الجداء الديكارتي لدورتين C_n و C_m:

$$\chi_s(C_n \square C_m) = 5; if\ m\ and\ n \geq 30.$$

1-مفاهيم أساسية

تعريف (2-1): [1]

البيان G هو مجموعة منتهية غير خالية V من الاشياء (objects) تسمى الرؤوس (vertices) مع مجموعة E (تعبر عن العلاقات بين الرؤوس) مكونة من ثنائيات من مجموعة الرؤوس V تسمى أضلاع البيان (edges). الرؤوس تسمى احياناً عقد (nodes) بينما يشار للأضلاع على انها روابط (links). الضلع $e = uv$ يربط بين الرأسين u, v ونسمي u و v رأسان متجاوران (adjacent) بينما كل من الرأسين u و v واقعان (incident) على الضلع $e = uv$.

تعريف (2-2): [1]

المسار (Path): هو متتالية من الرؤوس المتجاورة بحيث لا تحوي رؤوس مكررة، يرمز له بالرمز P_n، مجموعة اضلاعه

$$E(\mathrm{P}_n) = \{(v_i, v_{i+1}) |\ 1 \leq i \leq n-1\}$$

تعريف (2-3): [1]

الدورة (Cycle): هي مسار مغلق ونرمز لها بالرمز C_n.

تعريف (2-4): [1]

البيان ثنائي التجزئة التام (Complete Bipartite Graph) $\mathbf{K_{m,n}}$: مكون من مجموعتين من الرؤوس حيث كل مجموعة عناصرها مستقلة مثنى مثنى (رأسان مستقلان أي غير متجاوران)، كل رأس من المجموعة الاولى يجاور جميع رؤوس المجموعة الثانية.

تعريف (2-5): [1]

الشجرة Tree: بيان مترابط خالي من الدورات.

تعريف (2-6):

الغابة Forest: بيان خالي من الدورات.

تعريف (2−7) [10]: **بيان جاهانجير (Jahangir graph)**:

بيان جاهانجير $J_{n,m}$ حيث $n \geq 1,\ m \geq 3$ هو بيان من الرتبة $nm+1$ ويحوي دورة C_{nm} مع رأس إضافي مركزي يتصل بـ m رأس ولتكن هذه الرؤوس $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$ بحيث تكون المسافة بين أي رأسين v_i و v_{i+1} تساوي n وذلك لأجل $1 \leq i \leq m-1$ في الدورة C_{nm}.

تعريف (2−8) [12]:

بيانات ليمون Lemon graphs: نرمز لها بالرمز Le_n حيث مجموعة الرؤوس هي:

$$V(Le_n) = \{a, u_i, v_i; 1 \leq i \leq n\}$$

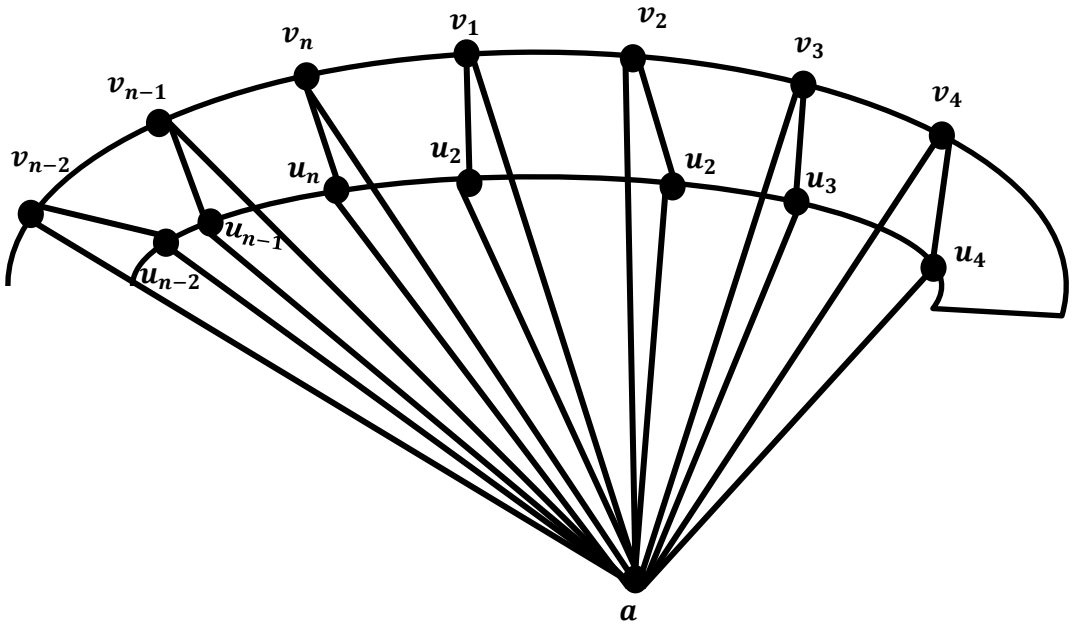
وله مجموعة الاضلاع:

$$E(Le_n) = \{au_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{av_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_iv_i;\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_iu_{i+1};\ 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_nu_1\} \cup \{v_iv_{i+1};\ 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_nv_1\}.$$

الشكل 1 لتوضيح التعريف

تعريف (2−9):

تلوين الرؤوس: [1] ليكن البيان $G(V,E)$، ومجموعة منتهية من الألوان (اعداد الصحيحة) $C = \{1,2, \dots, c\}$، تلوين الرؤوس هو تابع $f: V \to C$ حيث يقرن كل رأس من رؤوس البيان بعنصر من عناصر



الشكل 1: بيان Le_n

المجموعة C بشرط ان يتحقق: لأجل كل رأسين u, v متجاورين من رؤوس البيان G لا يكون لهما نفس اللون أي ان $f(u) \neq f(v)$. العدد اللوني للبيان G نرمز له بالرمز $\chi(G)$ وهو عبارة عن اصغر رتبة لمجموعة الألوان C بحيث يتحقق شرط التلوين (أقل عدد من الألوان).

إذا كان $f: V \to \{1,2, \dots, c\}$ تلويناً لرؤوس البيان $G(V,E)$ ولتكن V_i مجموعة الرؤوس التي تم تلوينها باللون i لأجل كل $i = 1..c$، نسمي V_i بالصف اللوني i. أي انه بعد تلوين رؤوس البيان يتم تقسيم مجموعة الرؤوس الى c مجموعة جزئية من الرؤوس المستقلة فيما بينها V_i يسمى كل منها صفاً لونياً، حيث انه يتحقق $V = \cup_{i=1}^{c} V_i$.

تعريف (2−10) [3]: التلوين النجمي للبيان G

ليكن $f: V \to C$ تطبيق تلوين، نسمي f تطبيق تلوين نجمي إذا لم يوجد في البيان مساراً P_4 كبيان جزئي ثنائي اللون (أي أن البيان المُحدَث باجتماع أي صفين لونيّن هو غابة).

العدد اللوني النجمي: [3]

هو أقل عدد من الألوان اللازمة لتلوين البيان G تلويناً نجمياً، ويُرمز له بالرمز $\chi_{P_4}(G)$ واختصاراً $\chi_s(G)$.

2- النتائج

التلوين النجمي لبيانات جاهانجير في حالة $n = 2$:

مبرهنة (3-1):

لأجل بيانات جاهانجير $J_{2,m}$ يكون العدد اللوني النجمي

$$\chi_s(J_{2,m}) = 4$$

برهان:

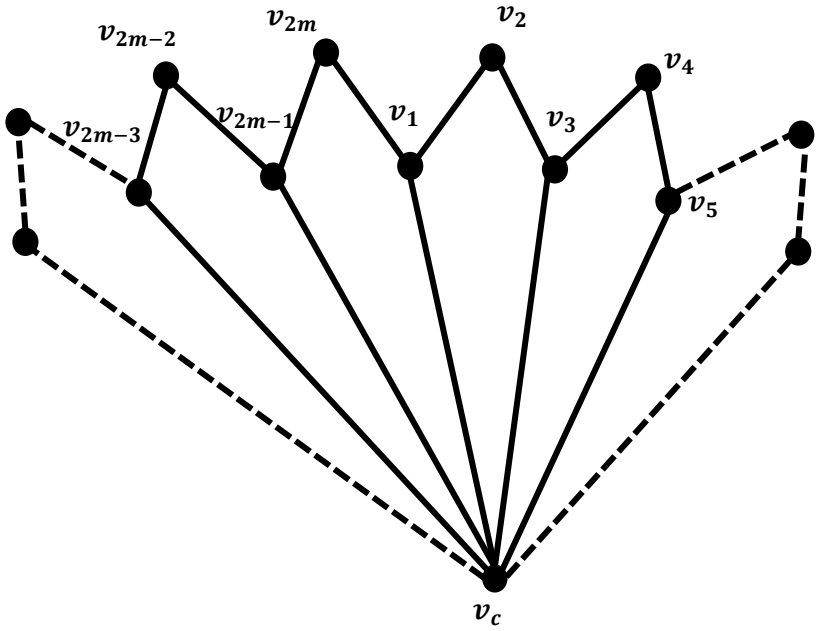
كل بيان جاهانجير $J_{2,m}$ يحوي البيان الجزئي الموضح في الشكل 2

لو أردنا التلوين باستخدام ثلاثة ألوان:

الرأس v_c يأخذ اللون 1

الرأس v_1 يأخذ اللون 2

الرأس v_2 يأخذ اللون 1



الشكل 2: بيان $J_{2,m}$

لا يمكن تلوين الرأس v_3 باللون 2 لذلك نعطيه اللون 3

الرأس v_4 يأخذ اللون 1

الرأس v_5 يأخذ لا يمكن تلوينه لأنه سيكون هناك مسار P_4 بلونين.

.....

الرأس v_c يأخذ اللون 1

الرأس v_1 يأخذ اللون 2

الرأس v_2 يأخذ اللون 1

لا يمكن تلوين الرأس v_3 باللون 2 لذلك نعطيه اللون 3

الرأس v_4 يأخذ اللون 2

الرأس v_5 يأخذ لا يمكن تلوينه لأنه سيكون هناك مسار P_4 بلونين.

.....

الرأس v_c يأخذ اللون 1

الرأس v_1 يأخذ اللون 2

الرأس v_2 يأخذ اللون 3

الرأس v_3 يأخذ اللون 2

لا يمكن تلوين الرأس v_4 بأي من اللونين 1 أو 3 لأنه سيكون هناك مسار P_4 بلونين.

لذلك نلاحظ أنه لا يمكن إيجاد تلوين نجمي بثلاثة ألوان لذلك $\chi_s(\boldsymbol{J_{2,m}}) > 3$.

سنبرهن أن أربعة ألوان كافية لإيجاد تلوين نجمي حيث نميز ثلاث حالات:

حالة 1: $\boldsymbol{m \equiv 0\ mod\ 3}$

في هذه الحالة سيتم توزيع الألوان وفق التالي:

$$f(v_c) = 4$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 1\ ;\ i \equiv 1\ mod\ 3, \\ 2\ ;\ i \equiv 2\ mod\ 3, \\ 3\ ;\ i \equiv 0\ mod\ 3. \end{cases}$$

حالة 2: $\boldsymbol{m \equiv 1\ mod\ 3}$

عندئذٍ سيتم تلوين الرؤوس الخمسة الأخيرة بالتسلسل بالشكل 2 3 2 1 2 ويتم تلوين بقية الرؤوس كما في التطبيق f الذي استخدمناه في الحالة 1.

حالة 3: $\boldsymbol{m \equiv 2\ mod\ 3}$

عندئذٍ سيتم تلوين الرأس الأخير باللون 2 ويتم تلوين بقية الرؤوس كما في التطبيق f المُستخدم في الحالة 1.

هذا التلوين يعطي تلوين بدون مسارات ثنائية اللون من الطول 4 وبالتالي سيكون العدد اللوني النجمي في هذه الحالة:

$$\chi_s(\boldsymbol{J_{2,m}}) = 4$$

□

مبرهنة (3−2):

ليكن n عدد طبيعي يحقق $n \geq 4$ عندئذٍ:

$$\chi_s(\boldsymbol{Le_n}) = 5$$

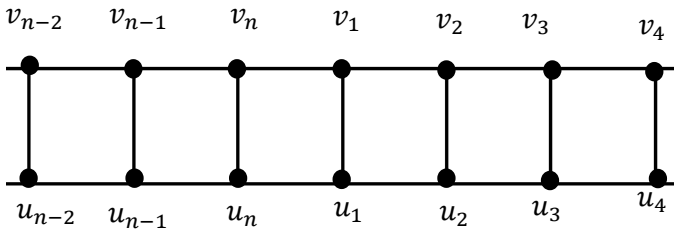
برهان:

في البيان $\boldsymbol{Le_n}$ سيكون البيان G الموضح في الشكل 2 هو بيان جزئي لذلك فإنَّ

$$\chi_s(\boldsymbol{Le_n}) \geq \chi_s(\mathrm{G})$$

أيضاً بما أنَّ البيان $\boldsymbol{C_n}$ هو بيان جزئي في البيان G فإنَّ $\chi_s(G) \geq \chi_s(\boldsymbol{C_n}) = 3$

سنبرهن بدايةَ أنَّ ثلاثة ألوان غير كافية لتلوين البيان G بالتلوين النجمي:



الشكل 3: البيان G جزئي من البيان Le_{n}

بفرض أنه تم تلوين الرأس $\boldsymbol{v_1}$ باللون 1 والرأس $\boldsymbol{v_2}$ باللون 2 عندئذٍ هناك حالتان فقط لتلوين الرأس $\boldsymbol{u_2}$

حالة 1:

نعطي الرأس $\boldsymbol{u_2}$ اللون 3 عندئذ سيتم تلوين الرأس $\boldsymbol{u_1}$ باللون 2 حصراً (لأنه يجاور اللونين 1 و3) وبالتالي أياً يكن اللون المُعطى للرأس $\boldsymbol{u_n}$ سنحصل على بيان جزئي $\boldsymbol{P_4}$ بلونين.

حالة 2:

نعطي الرأس $\boldsymbol{u_2}$ اللون 1 عندئذ سيتم تلوين الرأس $\boldsymbol{u_1}$ باللون 3 حصراً (لكي لا نحصل على بيان جزئي $\boldsymbol{P_4}$ بلونين)، وبالتالي أياً يكن اللون المُعطى للرأس $\boldsymbol{v_n}$ سنحصل على بيان جزئي $\boldsymbol{P_4}$ بلونين.

من الحالتين السابقتين نجد أنَّ ثلاثة الوان غير كافية، لذلك سيكون $\chi_s(G) \geq 4$ وبالتالي اذا وجد تلوين نجمي بأربعة ألوان فسيصبح $\chi_s(G) = 4$.

1. اذا كانت $n \equiv 0(mod\ 4)$

لأجل $i = 1..n$ يتم تلوين رؤوس الحلقتين وفق التطبيق:

$$f(v_i) = \begin{cases} 1\ ; i \equiv 1\ mod\ 4, \\ 2\ ; i \equiv 2\ mod\ 4, \\ 3\ ; i \equiv 3\ mod\ 4, \\ 4\ ; i \equiv 0\ mod\ 4. \end{cases}$$

$$f(u_i)=\begin{cases}3\,;i\equiv 1\ mod\ 4,\\4\,;i\equiv 2\ mod\ 4,\\1\,;i\equiv 3\ mod\ 4,\\2\,;i\equiv 0\ mod\ 4.\end{cases}$$

هذا التوزيع يضمن وجود تلوين نجمي للبيان G.

2. اذا كانت $n\equiv 2(mod\ 4)$

لأجل $i=1..n-2$ يتم تلوين رؤوس الحلقتين وفق التطبيق:

$$f(v_i)=\begin{cases}1\,;i\equiv 1\ mod\ 4,\\2\,;i\equiv 2\ mod\ 4,\\3\,;i\equiv 3\ mod\ 4,\\4\,;i\equiv 0\ mod\ 4.\end{cases}$$

$$f(u_i)=\begin{cases}3\,;i\equiv 1\ mod\ 4,\\4\,;i\equiv 2\ mod\ 4,\\1\,;i\equiv 3\ mod\ 4,\\2\,;i\equiv 0\ mod\ 4.\end{cases}$$

ويتم تلوين الرؤوس المتبقية في هذه الحالة بالشكل:

f_i	$n-1$	n
v_i	3	2
u_i	1	4

هذا التوزيع يضمن وجود تلوين نجمي.

3. اذا كانت $n\equiv 1(mod\ 4)$ و $n\neq 5$

لأجل $i=1..n-5$ يتم تلوين رؤوس الحلقتين وفق التطبيق:

$$f(v_i)=\begin{cases}1\,;i\equiv 1\ mod\ 4,\\2\,;i\equiv 2\ mod\ 4,\\3\,;i\equiv 3\ mod\ 4,\\4\,;i\equiv 0\ mod\ 4.\end{cases}$$

$$f(u_i)=\begin{cases}3\,;i\equiv 1\ mod\ 4,\\4\,;i\equiv 2\ mod\ 4,\\1\,;i\equiv 3\ mod\ 4,\\2\,;i\equiv 0\ mod\ 4.\end{cases}$$

ويتم تلوين الرؤوس الخمسة المتبقية في هذه الحالة بالشكل:

f_i	$n-4$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
v_i	1	2	4	3	2
u_i	4	3	2	1	4

هذا التوزيع يضمن وجود تلوين نجمي.

4. في حالة $n=5$ عندئذٍ:

إن توزيع الألوان سيتم وفق الاتي:

f_i	1	2	3	4	5
v_i	1	2	4	3	2
u_i	4	3	2	1	3

هذا التوزيع يضمن تلوين نجمي للبيان G عندما $n = 5$.

5. اذا كانت $n \equiv 3(mod\ 4)$

لأجل $i = 1..n-5$ يتم تلوين رؤوس الحلقتين وفق التطبيق:

$$f(v_i) = \begin{cases} 1\,; i \equiv 1\ mod\ 4, \\ 2\,; i \equiv 2\ mod\ 4, \\ 3\,; i \equiv 3\ mod\ 4, \\ 4\,; i \equiv 0\ mod\ 4. \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 3\,; i \equiv 1\ mod\ 4, \\ 4\,; i \equiv 2\ mod\ 4, \\ 1\,; i \equiv 3\ mod\ 4, \\ 2\,; i \equiv 0\ mod\ 4. \end{cases}$$

ويتم تلوين الرؤوس السبعة المتبقية في هذه الحالة بالشكل:

f_i	$n-6$	$n-5$	$n-4$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
v_i	1	2	4	3	2	1	4
u_i	3	4	1	2	4	3	2

هذا التوزيع يضمن وجود تلوين نجمي للبيان G.

لذلك $\chi_s(G) = 4$.

البيان Le_n هو البيان السابق G مع رأس c يجاور جميع الرؤوس الملونة وفق f في الحالات السابقة لذلك سيأخذ لون مختلف وليكن $f(c) = 5$ وبالتالي يصبح $\chi_s(Le_n) = \chi_s(G) + 1 = 5$. □

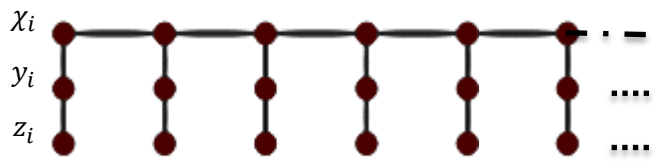
بيان Firecracker: [11]

نرمز له بالرمز $\boldsymbol{F_{m,n}}$ حيث يتكون من $\boldsymbol{m}$ بيان نجمي $\boldsymbol{S_n}$، مع وجود مسار يربط بين ورقة (رأس درجته واحد) من كل بيان نجمي.

نتيجة (3−1):

$$\chi_s(\boldsymbol{F_{m,3}}) = 3.$$

برهان:



الشكل (4)

البيان $F_{m,3}$ يحوي البيان P_m كبيان جزئي، ومن المعلوم أنَّ $\chi_s(P_m) = 3$، لذلك فإنَّ $\chi_s(F_{m,3}) \geq 3$.

والان نحن بحاجة لإثبات أنه يوجد تلوين نجمي بثلاثة ألوان، نلاحظ أن التلوين الاتي يحقق شرط التلوين النجمي لأن أي مسار P_4 جزئي من البيان $F_{m,3}$ سيكون له أكثر من لونين

χ_i: 1 2 3 1 2 3 1 2 3 ...
y_i: 2 3 1 2 3 1 2 3 1 ...
z_i: 3 1 2 3 1 2 3 1 2 ...

وبالتالي $3 \leq \chi_s(F_{m,3})$، لذلك $\chi_s(F_{m,3}) = 3$. □

الاستنتاجات والتوصيات:

في هذا العمل تمت دراسة التلوين النجمي لبعض عائلات البيانات، حيث تم تحديد العدد اللوني النجمي لها بالاعتماد في الدراسة على بنية البيان وطريقة توزيع الألوان. أظهرت النتائج أن بنية البيان تساهم أحياناً في منع ظهور المسارات ثنائية اللون مما يسمح بتوسيع اطار الدراسة ليشمل التلوين بدون مسارات ثنائية اللون من الطول $k \geq 4$. وبناءً على ذلك يُقترح دراسة التعميم من اجل صفوف بيانات أخرى مثل بيانات بيترسن المعممة وبيانات جاهانجير، الى جانب بحث الصياغة الخوارزمية والنمذجة باستخدام البرمجة الخطية الصحيحة.

References:

[1] Chartrand, Gary and Zhang, Ping. Chromatic Graph Theory, *Discrete Mathematics and Its application*, (**2009**), FL 33487-2742.

[2] Shaheen, Ramy and Kanaya, Ziad and Jakhlab, Samar. D-Distance Coloring of Generalized Petersen Graphs P(n,k). Open journal of discrete mathematics. (**2017**) 7, 185-199. https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=79024

[3] Alon, N., McDiarmid, C.,Reed,B.: Acyclic coloring of graphs. Random Struct. Algorithms 2, 277–288 (**1991**). https://www.cs.toronto.edu/~molloy/2427-25/readings/acyclic.pdf

[4] T. Karthick, Star Coloring of Certain Graph Classes, Graphs and Combinatorics (**2018**) 34:109–128 https://doi.org/10.1007/s00373-017-1864-6.

[5] Gebremedhin, A.H., Tarafdar, A., Manne, F., Pothen, A.: New acyclic and star coloring algorithms with applications to computing Hessians. SIAM J. Sci. Comput. **29**, 1042–1072(**2007**). https://www.cs.purdue.edu/homes/apothen/Papers/acyclic-SISC.pdf

[6] Gebremedhin, A.H., Manne, F., Pothen, A.: What color is your Jacobian?Graph coloring for computing derivatives. SIAM Rev. **47**(4), 629–705 (**2005**). https://www.cs.purdue.edu/homes/apothen/Papers/sirev2005.pdf

[7] Fertin, G., Raspaud, A., Reed, B.: Star coloring of graphs. J. Graph Theory 47, 163–182 (**2004**). https://hal.science/hal-00307788v1/document

[8] Ndreca, S., Procacci, A., Scoppola, B.: Improved bounds on coloring of graphs. Eur. J. Comb. 33,592–609 (**2011**). https://arxiv.org/pdf/1005.1875

[9] Tianyong Han, Zehui Shao, Enqiang Zhu, Zepeng Li, and Fei Deng. Star coloring of cartesian product of paths and cycles. Ars Comb., 124:65–84, (**2016**). https://combinatorialpress.com/ars/vol124/

[10]Kok, J. "A Note on -Colouring of Jahangir Graphs." 28 Jun 2018. https://arxiv.org/abs/1806.10731

[11] Sarbaini, A.N.M, Salman, Ganesha Lapenangga Putra - L3,2,1 LABELING OF FIRECRACKER GRAPH, J. Indones. Math. Soc. Vol. 29, No. 01 (2023), pp. 24–35. https://www.google.com/url?esrc=s&q=&rct=j&sa=U&url=https://jims-a.org/index.php/jimsa/article/download/1177/351&ved=2ahUKEwiYm4TI9f6RAxUZVfEDHY9eFMEQFnoECAUQAg&usg=AOvVaw3o1p4APPPSJ50SQyJcwjIk

[12] B J Septory et al 2021 J. Phys.:Conf. Ser.**1836** 012016 https://www.researchgate.net/publication/350335824_On_rainbow_antimagic_coloring_of_special_graphs.