on Approximation of Derivatives of Functions in Weighted Morrey Space

Dr. Ahmed Kinj*

(Received 17 / 2 / 2026. Accepted 6/ 4 / 2026)

□ ABSTRACT □

Weighted Morrey space is one of the most important types of Banach spaces. This space was introduced by Y. Komori and S. Shirai in 2009 as the set of all periodic and measurable functions f defined on $[0,2\pi]$ for which:

$$\sup_{I\subset[0,2\pi]} \frac{1}{\big(\omega(I)\big)^{\lambda}} \int_I |f(x)|^p \omega(x)\, dx < \infty,$$

where, $0 \le \lambda \le 1$, $1 \le p < \infty$ and ω is a weight function.

Many researches have investigated the properties of Morrey space and the approximation of its functions by trigonometric polynomials such as Fejer sums and de la Vallée poussin sums. In this paper, we estimate the deviation of the fractional derivative of order α for a function f belonging to the weighted Morrey Sobolev space from derivative of the best trigonometric polynomial to f in terms of the best approximation, and in terms of the fractional moduli in the weighted Morrey space. Then, we estimate the norm of the fractional derivative for a function f in the weighted Morrey space. Moreover, an estimation of the difference between the derivative of a function f belonging to the weighted Morrey space and the derivative of the de la Vallée Poussin sums of the function f in terms of the fractional moduli in the weighted Morrey space is obtained.

Keywords: Best approximation, fractional derivative, trigonometric polynomials, weighted Morrey space.

Copyright **:**Latakia University Journal (Formerly Tishreen) -Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

*Assistant Professor, Faculty of Science, Latakia University, (Formerly Tishreen) Lattakia , Syria, ahmed.kinj@latakia-univ.edu.sy.

تقريب مشتقات الدوال في فضاء موري الموزون

د. أحمد كنج*

(تاريخ الإيداع17 / 2 /2026 . قبل للنشر في 6 / 4 / 2026)

□ ملخّص □

يعد فضاء موري الموزون أحد أهم أنواع فضاءات باناخ. عُرف هذا الفضاء من قبل الباحثين Y. Komori و S. Shirai عام 2009 بأنه أسرة الدوال f الدورية والقابلة للقياس على المجال $[0,2\pi]$ التي تحقق من أجل $0 \leq \lambda \leq 1$ و $1 \leq p < \infty$ و ω دالة وزن، الشرط الآتي:

$$\sup_{I\subset[0,2\pi]} \frac{1}{\left(\omega(I)\right)^{\lambda}} \int_I |f(x)|^p \omega(x)\, dx < \infty.$$

تناولت العديد من الأبحاث خواص فضاء موري ودرست تقريبات دواله بكثيرات حدود مثلثية، مثل مجاميع فيجر ومجاميع دي لا فالي بوسين. توصلنا في هذا البحث إلى تقدير الفرق بين المشتق الكسري من المرتبة α لدالة f تنتمي إلى فضاء موري سوبوليف الموزون والمشتق الكسري لأفضل كثير حدود مثلثي يُقرب الدالة f بدلالة أفضل تقريب، وكذلك بدلالة معامل الملوسة الكسري في فضاء موري الموزون. وبالاستفادة من ذلك، أوجدنا تقديراً لنظيم المشتق الكسري لدالة f في فضاء موري الموزون. وعلاوة على ذلك، قدَّرنا الفرق بين مشتق دالة f تنتمي إلى فضاء موري الموزون ومشتق مجاميع دي لا فالي بوسين للدالة f بدلالة معامل الملوسة الكسري في فضاء موري الموزون.

الكلمات المفتاحية: أفضل تقريب، المشتق الكسري، كثيرات الحدود المثلثية، فضاء موري الموزون.

حقوق النشر : مجلة جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً)– سورية، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب الترخيص CC BY–NC–SA 04

* مدرس كلية العلوم، جامعة اللاذقية(تشرين سابقاً)، اللاذقية، سوريا، ahmed.kinj@latakia-univ.edu.sy

مقدمة:

احتل فضاء موري مكاناً مميزاً بين الفضاءات الدالية، فقد أسهم بحل العديد من المسائل في المعادلات التفاضلية الجزئية والمؤثرات التكاملية والتحليل التوافقي والميكانيك، (انظر على سبيل المثال [1] و [2]). نظراً لأهمية هذا الفضاء وتطبيقاته في مختلف المجالات، بدت الحاجة ملّحة إلى تطويره وتعميمه في عدة اتجاهات، فقد ظهر فضاء موري بأس متغير في أعمال العديد من الباحثين [3] [4] [5]. في عام 2009 عرّف الباحثان Y.Komori و S.Shirai [6] فضاء موري الموزون ودرسا أهم خواصه. منذ ذلك الحين توالت الدراسات حول خواص هذا الفضاء وتطبيقاته في حل بعض مسائل القيم الحدية [7] وفي نظرية المؤثرات [8] و [9] و [10] و [11].

تناولت العديد من الدراسات تقريب دوال فضاء موري، نذكر فيما يأتي أهم هذه الدراسات:

توصل D.Israfilov و N.Tozman عام 2008 [12] إلى تقريب دوال فضاء موري سميرنوف المعرفة على منطقة بسيطة الترابط في المستوي العقدي ومحاطة بمنحني أملس بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير.

تابع A. kinj الدراسة عام 2017 [13] بتقريب دوال فضاء موري بمجاميع دي لا فالي بوسين. وفي عام 2018 [14] بتقريب دوال فضاء موري سميرنوف المعرفة على منطقة ثنائية الترابط في المستوي العقدي ومحاطة بمنحنيين أملسين بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير لورنت.

درس S. Jafarov تقريب دوال فضاء موري بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فوريه مثل مجاميع فيجر ومحاميع زيغموند عام 2020 و 2023 في [15] و [16]. أما تقريب دوال فضاء موري الموزون وغير الموزون في أعمال Z.Cakir وآخرون [17] و [18].

قمنا في هذا البحث بتقدير الفرق بين المشتق الكسري من المرتبة α لدالة f تنتمي إلى فضاء موري سوبوليف الموزون والمشتق الكسري لأفضل كثير حدود مثلثي يُقرب الدالة f بدلالة أفضل تقريب، وكذلك بدلالة معامل الملوسة الكسري في فضاء موري الموزون. وبالاستفادة من ذلك، أوجدنا تقديراً لنظيم المشتق الكسري لدالة f في فضاء موري الموزون. وعلاوة على ذلك، قدّرنا الفرق بين مشتق دالة f تنتمي إلى فضاء موري الموزون ومشتق مجاميع دي لا فالي بوسين للدالة f بدلالة معامل الملوسة الكسري في فضاء موري الموزون.

دراسات مشابهة تمت في فضاءات دالية مختلفية، عام 2025 في فضاء لورنتز الموزون [19] من قبل S. Jafarov، وفي فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير عام 2017 ظهرت أعمال D.Israfilov وآخرون [20] و [21]، وفي فضاء أورليتش الموزون عام 2012 دراسة R.Akgün [22]، وعام 2021 دراسة S.Jafarov في [23].

أهمية البحث وأهدافه:

يلعب فضاء موري الموزون دوراً أساسياً في حل الكثير من المسائل التطبيقية التي ظهرت في المعادلات التفاضلية الجزئية والمؤثرات التكاملية والتحليل التوافقي والميكانيك. لذا فإن لدراسة خواص تقريبات دوال هذا الفضاء بكثيرات حدود مثلثية أهمية كبيرة. أدخلنا في هذا البحث الاشتقاق الكسري، ومعامل الملوسة الكسري وهو ما يتيح دقة أكبر لتقييم الفروق بين الدالة وتقريباتها. أما أهداف البحث فيمكن تلخيصها بالنقاط الآتية:

1- تقدير الفرق بين المشتق الكسري من المرتبة α لدالة f تنتمي إلى فضاء موري سوبوليف الموزون والمشتق الكسري لأفضل كثير حدود مثلثي يُقرب الدالة f بدلالة أفضل تقريب، وكذلك بدلالة معامل الملوسة الكسري.

2-تقدير نظيم المشتق الكسري لدالة f في فضاء موري الموزون.

3-تقدير الفرق بين مشتق دالة f تنتمي إلى فضاء موري الموزون ومشتق مجاميع دي لا فالي بوسين للدالة f بدلالة معامل الملوسة الكسري في فضاء موري الموزون.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكلٍ خاص ضمن نظرية التقريب، لذلك فإننا اعتمدنا على المنهج التحليلي والاستنباطي للوصول إلى النتائج المرجوة. والطرائق المتبعة تعتمد على بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية كفضاء موري الموزون ، والاشتقاق الكسري، وخواص متسلسلات فورييه ومجاميع دي لا فالي بوسين الموجودة في الكتب والمقالات العلمية المنشورة.

النتائج والمناقشة:

ليكن $\mathbb{T} = [0,2\pi[$ و $I_x =]x-r, x+r[$، حيث $x > 0$ و $0 < r < 2\pi$ وليكن $I = I_x \cap \mathbb{T}$.

يقال عن الدالة $\omega: \mathbb{T} \to]0,\infty[$ أنها دالة وزن إذا كانت قابلة للمكاملة على $\mathbb{T}$. لنضع:

$$\omega(I) = \int_I \omega(x)\,dx.$$

تعريف (1) [24]: **أسرة أوزن ماكنهوبت $A_p(\mathbb{T})$**

يقال عن دالة الوزن $\omega: \mathbb{T} \to]0,\infty[$ إنها تنتمي إلى أسرة أوزان ماكنهوبت $A_p(\mathbb{T})$، حيث $1 < p < \infty$ إذا حققت الشرط الآتي:

$$\sup_{I\subset[0,2\pi]} \left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \big(\omega(x)\big)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} < \infty,$$

حيث $|I|$ قياس ليبيغ للمجموعة I.

تعريف (2) [6]: **فضاء موري الموزون $\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$**

ليكن $0 \le \lambda \le 1$ و $1 \le p < \infty$ و ω دالة وزن. يُعرف فضاء موري الموزون $\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ بأنه مجموعة كل الدوال f الدورية ودورها 2π والقابلة للقياس على $\mathbb{T}$ التي تحقق الشرط الآتي:

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} = \left\{\sup_{I\subset[0,2\pi]} \frac{1}{\big(\omega(I)\big)^{\lambda}}\int_I |f(x)|^p \omega(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty. \qquad (1)$$

إنّ فضاء موري الموزون $\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ مع النظيم المعرف بالعلاقة (1) هو فضاء منظم وتام.

حالات خاصة من فضاء موري الموزون:

من أجل $\lambda = 0$، فإنَّ الفضاء $\mathcal{M}_{\omega}^{p,0}(\mathbb{T})$ هو فضاء ليبيغ الموزون $L_{\omega}^{p}(\mathbb{T})$.

من أجل $\lambda = 1$، فإنَّ الفضاء $\mathcal{M}_{\omega}^{p,1}(\mathbb{T})$ هو فضاء الدوال المحدودة أساسياً $L_{\omega}^{\infty}(\mathbb{T})$.

من أجل $\omega = 1$، فإنَّ الفضاء $\mathcal{M}_{1}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ هو فضاء موري الكلاسيكي $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$.

إذا كان $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le 1$، فإنَّ $\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda_2}(\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda_1}(\mathbb{T})$.

لتكن f دالة مستمرة، ودورية ودورها 2π، وملساء بالتجزئة (piecewise smooth). عندئذٍ تقبل الدالة f النشر في متسلسلة فوريه بالعلاقة [25]

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)\,cos(kx)+b_k(f)\sin(kx), \qquad (2)$$

حيث تُعطى الأمثال $a_k(f)$ و $b_k(f)$ بالعلاقتين الآتيتين:

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,coskt\,dt \quad ,k=0,1,2,\dots$$

$$b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\;sinkt\,dt \quad ,k=1,2,\dots \;.$$

ملاحظة (1): يمكن التعبير عن العلاقة (2) بالصيغة العقدية وفق العلاقة الآتية:

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx}.$$

بالواقع، إنطلاقاً من العلاقة (2) لدينا:

$$f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)\,cos(kx)+b_k(f)\sin(kx)$$

$$=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k(f)-ib_k(f)}{2}\right)e^{ikx}+\left(\frac{a_k(f)+ib_k(f)}{2}\right)\mathrm{e}^{-ikx}.$$

بوضع $c_k(f)=\frac{a_k(f)-ib_k(f)}{2}$ و $c_{-k}(f)=\frac{a_k(f)+ib_k(f)}{2}$ و $c_0(f)=\frac{a_0(f)}{2}$ نجد أنَّ:

$$f(x)=c_0(f)+\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,e^{ikx}+c_{-k}(f)\mathrm{e}^{-ikx}$$

$$=c_0(f)+\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,e^{ikx}+\sum_{k=1}^{\infty}c_{-k}(f)\,e^{-ikx}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}.$$

ولمّا كان $c_k(f)=\frac{a_k(f)-ib_k(f)}{2}$ لكل $k\geq 1$ و $c_{-k}(f)=\overline{c_k(f)}$ و $c_0(f)=\frac{a_0(f)}{2}$، فإنَّ الأمثال $c_k(f)$ تُعطى بالعلاقة الآتية:

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,e^{-ikt}dt, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

تعريف (3) [26]: ليكن $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx}$، عندئذٍ يُعطى المشتق الكسري من المرتبة $\alpha>0$ للدالة f بالعلاقة الآتية:

$$f^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)(ik)^{\alpha}e^{ikx},$$

حيث $(ik)^{\alpha}=|k|^{\alpha}\,e^{\frac{1}{2}\pi i\,\alpha\,sign\,k}$ ويقصد بـ $sign\,k$ إشارة العدد الصحيح k.

تعريف (4) [27]: **فضاء موري سوبوليف الموزون** $W_{\omega,\alpha}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$

يرمز بـ $\mathcal{W}_{\omega,\alpha}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ لأسرة دوال موري الموزون $f \in \mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$، التي مشتقها الكسري من المرتبة $\alpha > 0$ موجود وينتمي إلى فضاء دوال موري الموزون أي، $f^{(\alpha)} \in \mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$.

الفضاء $\mathcal{W}_{\omega,\alpha}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ هو فضاء باناخ إذا عرفنا عليه النظيم الآتي:

$$\|f\|_{\mathcal{W}_{\omega,\alpha}^{p,\lambda}} = \|f\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} + \left\|f^{(\alpha)}\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

تعريف (5) [28]: **معامل الملوسة الكسري في فضاء موري الموزون $\boldsymbol{\Omega_{\beta}(f,\delta)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}}$**

لتكن $f \in \mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$، حيث $1 < p < \infty$ و $0 < \lambda < 1$ و $\omega \in A_p(\mathbb{T})$. وليكن $\lfloor\beta\rfloor$ الجزء الحقيقي الأصغر أو المساوي للعدد الحقيقي $\beta > 0$. يُعرف معامل الملوسة الكسري للدالة f في فضاء موري الموزون بالعلاقة الآتية:

$$\Omega_{\beta}(f,\delta)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} = \sup_{\substack{0<h_i\le\delta \\ 0<t\le\delta}} \left\| \prod_{i=1}^{\lfloor\beta\rfloor} \left(I - \Lambda_{h_i}\right) \sigma_t^{\beta-\lfloor\beta\rfloor} f \right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}, \quad \beta \ge 1$$

$$\Omega_{\beta}(f,\delta)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} = \sup_{0\le h\le\delta} \left\|\sigma_t^{\beta} f\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}, \quad 0 < \beta < 1$$

حيث،

$$\Lambda_h f(x) = \frac{1}{h}\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{T}, \qquad h > 0.$$

و

$$\sigma_h^{\beta} f(x) = (I - \Lambda_h)^{\beta} f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\beta+1)}{k!\ \Gamma(\beta-k+1)} \frac{1}{h^k} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \dots \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x+u_1+u_2+\dots+u_k)\,du_1 \dots du_k\,.$$

إنَّ معامل الملوسة الكسري $\Omega_{\beta}(f,\delta)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}$ يحقق الخواص الآتية:

الدالة $\Omega_{\beta}(f,\delta)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}$ غير متناقصة بالمتحول δ.

إذا كان $f, g \in \mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ فإنَّ $\Omega_{\beta}(f+g,\delta)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \le \Omega_{\beta}(f,\delta)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} + \Omega_{\beta}(g,\delta)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}$.

إذا كان $\delta \to 0$ فإن $\Omega_{\beta}(f,\delta)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \to 0$.

تعريف (6) [29, p. 58]: **أفضل تقريب لدالة $\boldsymbol{f}$**

لتكن $\mathcal{T}_n$ أسرة كل كثيرات الحدود المثلثية من الدرجة n على الأكثر، ولتكن $f \in \mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$. يُرمز بـ $E_n(f)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}$ للخطأ الأصغري لتقريب الدالة f بالأسرة $\mathcal{T}_n$ أي،

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} = \inf_{T_n\in\mathcal{T}_n} \|f - T_n\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

إذا وجدت $T_n^* \in \mathcal{T}_n$ تحقق العلاقة الآتية:

$$\|f - T_n^*\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} = \inf_{T_n\in\mathcal{T}_n} \|f - T_n\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})},$$

تُسمى T_n^* أفضل تقريب من الدرجة n على الأكثر للدالة f.

ملاحظة (2): لتكن $f \in \mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$. عندئذٍ تقبل الدالة f النشر في متسلسلة فورييه بالعلاقة الآتية:

$$f(x)\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\,cos(kx) + b_k(f)\,\sin(kx)\,,\#$$

المجاميع الجزئية لمتسلسلة فوريه للدالة f تعطى بالعلاقة الآتية:

$$S_n(x,f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\,cos(kx) + b_k(f)sin\,(kx), \qquad n = 1,2,3,\dots$$

تعريف (7) [29]: **مجاميع دي لا فالي بوسين**

تُعرف مجاميع دي فالي بوسين لمتسلسلة فوريه للدالة f بالعلاقة الآتية:

$$V_{2n}(x,f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} S_k(x,f).$$

إنَّ المؤثر $S_n \longmapsto S_n(f)$ محدود في فضاء موري الموزون [28]. أي، يوجد ثابت موجب c_1 بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\|S_n(f)\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \le c_1\|f\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}. \tag{3}$$

بالاستفادة من المتراجحة (3)، يمكننا أن نبرهن على محدودية المؤثر $V_{2n} \longmapsto V_{2n}(f)$ في فضاء موري الموزون.

أياً يكن $f \in \mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ نجد أنَّ:

$$\|V_{2n}(f)\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} = \left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} S_k(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} = \frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=n}^{2n} S_k(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}$$
$$\le \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\|S_k(f)\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} c_1\|f\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} = c_1\|f\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

نذكر فيما يأتي بعض المبرهنات المساعدة التي سنستخدمها للوصول إلى النتائج المرجوة.

مبرهنة مساعدة (1) [28]: ليكن $\alpha > 0$ و $0 \le \lambda < 1$ و $1 < p < \infty$ و $\omega \in A_p(\mathbb{T})$. إذا كان $f \in \mathcal{W}_{\omega,\alpha}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$، فإنه يوجد ثابت موجب $c > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \le \frac{c}{(n+1)^\alpha} E_n\big(f^{(\alpha)}\big)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

مبرهنة مساعدة (2) [28]: ليكن $\alpha > 0$ و $0 \le \lambda < 1$ و $1 < p < \infty$ و $\omega \in A_p(\mathbb{T})$. إذا كان $T_n \in \mathcal{T}_n$ فإنه يوجد ثابت موجب $c > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\left\|T_n^{(\alpha)}\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \le c\, n^\alpha \|T_n\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

مبرهنة مساعدة (3) [28]: ليكن $\alpha > 0$ و $0 \le \lambda < 1$ و $1 < p < \infty$ و $\omega \in A_p(\mathbb{T})$. إذا كان $f \in \mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ فإنه يوجد ثابت موجب $c > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \le c\Omega_\beta\left(f,\frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

نعطي في المبرهنة الآتية تقديراً للفرق بين المشتق الكسري من المرتبة $\alpha > 0$ لدالة f تنتمي إلى فضاء موري سوبوليف الموزون والمشتق الكسري لأفضل كثير حدود مثلثي يُقرب الدالة f بدلالة أفضل تقريب.

مبرهنة (1): لتكن $f \in \mathcal{W}_{\omega,\alpha}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ من أجل $\alpha > 0$ و $0 \le \lambda < 1$ و $1 < p < \infty$ و $\omega \in A_p(\mathbb{T})$ وليكن $T_n(f) \in \mathcal{T}_n$ أفضل تقريب للدالة f. عندئذٍ يوجد ثابت موجب c بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\left\|f^{(\alpha)} - (T_n)^{(\alpha)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \le cE_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

البرهان: لمّا كان

$$\begin{aligned}&\left\|f^{(\alpha)} - (T_n)^{(\alpha)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\\ &\le \left\|f^{(\alpha)} - V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} + \left\|V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right) - (T_n)^{(\alpha)}\left(V_{2n}(f)\right)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\\ &+ \left\|(T_n)^{(\alpha)}\left(V_{2n}(f)\right) - (T_n)^{(\alpha)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}. \qquad (4)\end{aligned}$$

نقدّر الحد $\left\|f^{(\alpha)} - V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}$.

ليكن $T_n^*(f^\alpha) \in \mathcal{T}_n$ أفضل تقريب للدالة $f^{(\alpha)}$ ، عندئذٍ $V_{2n}(T_n^*(f^\alpha)) = T_n^*(f^\alpha)$ وبالتالي:

$$\begin{aligned}\left\|f^{(\alpha)} - V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} &\le \left\|f^{(\alpha)} - T_n^*(f^\alpha)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} + \left\|T_n^*(f^\alpha) - V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\\ &= E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} + \left\|V_{2n}(T_n^*(f^\alpha) - f^{(\alpha)})\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

بالاستفادة من محدودية المؤثر $V_{2n} \longmapsto V_{2n}(f)$ نجد أنَّ:

$$\begin{aligned}\left\|f^{(\alpha)} - V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} &\le E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} + c_1\left\|f^{(\alpha)} - T_n^*(f^\alpha)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\\ &\le (c_1+1)E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}. \qquad (5)\end{aligned}$$

نوجد الآن تقديراً للحد $\left\|V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right) - (T_n)^{(\alpha)}\left(V_{2n}(f)\right)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}$.

لمّا كان $V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right) = V_{2n}^{(\alpha)}(f)$، وباستخدام المبرهنة المساعدة (2) نجد أنَّ:

$$\begin{aligned}\left\|V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right) - (T_n)^{(\alpha)}\left(V_{2n}(f)\right)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} &= \left\|V_{2n}^{(\alpha)}(f) - (T_n)^{(\alpha)}\left(V_{2n}(f)\right)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\\ &\le c_2(2n)^\alpha \left\|V_{2n}(f) - T_n\left(V_{2n}(f)\right)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \le c_2(2n)^\alpha E_n\left(V_{2n}(f)\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}. \qquad (6)\end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}E_n\left(V_{2n}(f)\right) &= \inf_{Q_n \in \mathcal{T}_n} \|V_{2n}(f) - Q_n\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} = \inf_{Q_n \in \mathcal{T}_n} \|V_{2n}(f) - V_{2n}(Q_n)\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\\ &= \inf_{Q_n \in \mathcal{T}_n} \|V_{2n}(f - Q_n)\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \le c_1 \inf_{Q_n \in \mathcal{T}_n} \|f - Q_n\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})} = c_1 E_n(f)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}. \qquad (7)\end{aligned}$$

بتعويض (7) في (6)، وبالاستفادة من المبرهنة المساعدة (1)، نجد أن:

$$\left\|V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right)-(T_n)^{(\alpha)}\left(V_{2n}(f)\right)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\leq c_3\,(2n)^{\alpha}E_n(f)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\leq c_4E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}. \quad (8)$$

من جهة أخرى، بالاستفادة من المبرهنة المساعدة (2)، لدينا:

$$\begin{aligned}\left\|(T_n)^{(\alpha)}\left(V_{2n}(f)\right)-(T_n)^{(\alpha)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}&\leq c_5n^{\alpha}\left\|T_n\left(V_{2n}(f)\right)-T_n(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\\&\leq c_5n^{\alpha}\left\{\left\|T_n\left(V_n(f)\right)-V_{2n}(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}+\left\|V_{2n}(f)-T_n(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\right\}\\&\leq c_5n^{\alpha}\left\{E_n\left(V_{2n}(f)\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}+\left\|V_{2n}(f)-V_{2n}\left(T_n(f)\right)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\right\}. \quad (9)\end{aligned}$$

بالإستفادة من محدودية المؤثر $V_{2n}\longmapsto V_{2n}(f)$، والمتراجحة (7)، والتعويض في (9)، نجد أنَّ:

$$\left\|(T_n)^{(\alpha)}\left(V_{2n}(f)\right)-(T_n)^{(\alpha)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\leq c_5n^{\alpha}\left\{c_1E_n(f)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}+c_1\|f-T_n(f)\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\right\}.$$

ومنه نحصل على المتراجحة الآتية:

$$\left\|(T_n)^{(\alpha)}\left(V_{2n}(f)\right)-(T_n)^{(\alpha)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\leq c_6\,n^{\alpha}E_n(f)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

بالاستفادة من المبرهنة المساعدة (2)، يكون لدينا:

$$\left\|(T_n)^{(\alpha)}\left(V_{2n}(f)\right)-(T_n)^{(\alpha)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\leq c_7\,E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}. \quad (10)$$

بتعويض المتراجحات (5) و (8) و (10) في المتراجحة (4) يتم المطلوب.□

بالاستفادة من المبرهنة (1)، نحصل مباشرة على النتيجة الآتية التي تعطينا تقديراً للفرق بين المشتق الكسري من المرتبة α لدالة f تنتمي إلى فضاء موري سوبوليف الموزون والمشتق الكسري لأفضل كثير حدود مثلثي يُقرب الدالة f بدلالة معامل الملوسة الكسري في فضاء موري الموزون.

نتيجة (1): لتكن $f\in\mathcal{W}_{\omega,\alpha}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ من أجل $\alpha>0$ و $0\leq\lambda<1$ و $1<p<\infty$ و $\omega\in A_p(\mathbb{T})$ وليكن $T_n(f)\in\mathcal{T}_n$ أفضل تقريب للدالة f. عندئذٍ يوجد ثابت موجب c بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\left\|f^{(\alpha)}-(T_n)^{(\alpha)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\leq c\,\Omega_\beta\left(f^{(\alpha)},\frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

البرهان: لمّا كان $f\in\mathcal{W}_{\omega,\alpha}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$، فإنَّ $f^{(\alpha)}\in\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ وبالإستفادة من المبرهنة المساعدة (3)، نجد أنَّ:

$$E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\leq c\,\Omega_\beta\left(f^{(\alpha)},\frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

وبالإستفادة من المبرهنة (1)، نحصل على المتراجحة الآتية:

$$\left\|f^{(\alpha)}-(T_n)^{(\alpha)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\leq c\,\Omega_\beta\left(f^{(\alpha)},\frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_\omega^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

قمنا في المبرهنة الآتية بتقدير نظيم المشتق الكسري لدالة في فضاء موري الموزون.

مبرهنة (2) لتكن $f \in \mathcal{W}_{\omega,\alpha}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ من أجل $\alpha > 0$ و $0 \leq \lambda < 1$ و $1 < p < \infty$ و $\omega \in A_p(\mathbb{T})$ عندئذٍ تكون المتراجحة الآتية محققة:

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \leq c\left\{n^{\alpha}\|f\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} + E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\right\}.$$

البرهان: لدينا

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \leq \left\|f^{(\alpha)} - V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right)\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} + \left\|V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right)\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}. \quad (11)$$

ليكن $T_n^*(f^{\alpha}) \in \mathcal{T}_n$ أفضل تقريب للدالة $f^{(\alpha)}$ ، عندئذٍ من العلاقة (5) نكتب

$$\left\|f^{(\alpha)} - V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right)\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \leq (c+1)E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}. \quad (12)$$

من جهة أخرى، لكون $V_{2n}(f)$ كثير حدود مثلثي من الدرجة $2n$ بالاستفادة من المبرهنة المساعدة (2) ينتج أن:

$$\left\|V_{2n}\left(f^{(\alpha)}\right)\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} = \left\|V_{2n}^{(\alpha)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \leq c_1(2n)^{\alpha}\|V_{2n}(f)\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \leq c_8 n^{\alpha}\|f\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \quad (13)$$

بتعويض المتراجحتين (12) و (13) في (11) نحصل على المطلوب.□

ندرس في المبرهنة الآتية تقديراً للفرق بين مشتق دالة من فضاء موري الموزون ومشتق مجاميع دي لا فالي بوسين لهذه الدالة بدلالة معامل الملوسة الكسري.

مبرهنة (3): لتكن $f \in \mathcal{W}_{\omega,\alpha}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$ من أجل $\alpha > 1$ و $0 \leq \lambda < 1$ و $1 < p < \infty$ و $\omega \in A_p(\mathbb{T})$ عندئذٍ من أجل أي عدد طبيعي m يحقق $\alpha \geq m$ يوجد ثابت موجب c، بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\left\|f^{(m)} - V_{2n}^{(m)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \leq c\ \Omega_{\beta}\left(f^{(\alpha)}, \frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

البرهان: ليكن $T_{\mathrm{n}}(f) \in \mathcal{T}_n$ أفضل تقريب للدالة f عندئذٍ:

$$\begin{aligned}&\left\|f^{(m)} - V_{2n}^{(m)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\\ &\leq \left\|f^{(m)} - \left(T_{\mathrm{n}}(f)\right)^{(m)}\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} + \left\|\left(T_{\mathrm{n}}(f)\right)^{(m)} - V_n^{(m)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}. \quad (14)\end{aligned}$$

باستخدام المبرهنة (1)، والمبرهنة المساعدة (1)، نحصل على المتراجحة الآتية:

$$\left\|f^{(m)} - \left(T_{\mathrm{n}}(f)\right)^{(m)}\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \leq cE_n\left(f^{(m)}\right)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})} \leq \frac{c_9}{(n+1)^{\alpha-m}}E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}. \quad (15)$$

من جهة أخرى، لما كان $T_{\mathrm{n}}(f)-V_n(f)$ كثير حدود مثلثي من الدرجة $2n$، فإنه من المبرهنة المساعدة (2) نحصل على أنَّ:

$$\left\|\left(T_{\mathrm{n}}(f)\right)^{(m)}-V_{2n}^{(m)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\leq c\,(2n)^m\|T_{\mathrm{n}}(f)-V_n(f)\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}$$
$$\leq c\,(2n)^m\{\|f-T_{\mathrm{n}}(f)\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}+\|f-V_n(f)\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\}$$
$$\leq c\,n^{\alpha}\left\{E_n(f)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}+\frac{c_{10}}{(n+1)^{\alpha}}\Omega_{\beta}\left(f^{(\alpha)},\frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\right\}.$$

باستخدام المبرهنة المساعدة (1)، ينتج لدينا:

$$\left\|\left(T_{\mathrm{n}}(f)\right)^{(m)}-V_{2n}^{(m)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}$$
$$\leq c\frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}}\left\{c_{11}\,E_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}+c_{10}\,\Omega_{\beta}\left(f^{(\alpha)},\frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\right\}.$$

لما كان $f^{(\alpha)}\in\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})$، فإنه من المبرهنة المساعدة (3)، ينتج لدينا:

$$\left\|\left(T_n(f)\right)^{(m)}-V_{2n}^{(m)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}$$
$$\leq c\frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}}\left\{c_{12}\,\Omega_{\beta}\left(f^{(\alpha)},\frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}+c_{10}\Omega_{\beta}\left(f^{(\alpha)},\frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\right\}.$$

بوضع $c_{13}=c\,max\{c_{12},c_{10}\}$ نحصل على المتراجحة الآتية:

$$\left\|\left(T_n(f)\right)^{(m)}-V_{2n}^{(m)}(f)\right\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}\leq c_{13}\,\Omega_{\beta}\left(f^{(\alpha)},\frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\lambda}(\mathbb{T})}.$$

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا في هذا البحث بتقدير الفرق بين المشتق الكسري لدالة f تنتمي إلى فضاء موري سوبوليف الموزون والمشتق الكسري لأفضل كثير حدود مثلثي يُقرب الدالة f، بدلالة أفضل تقريب، وكذلك بدلالة معامل الملوسة الكسري في فضاء موري الموزون. كما أوجدنا تقديراً لنظيم المشتق الكسري لدالة f في فضاء موري الموزون. وعلاوة على ذلك، قدّرنا الفرق بين مشتق دالة f تنتمي إلى فضاء موري الموزون ومشتق مجاميع دي لا فالي بوسين للدالة f بدلالة معامل الملوسة الكسري في فضاء موري الموزون. ونوصي بمتابعة الدراسة في هذا المجال، بتقريب دوال فضاء موري سميرنوف الموزون بمجاميع فيجر ودي لا فالي بوسين لمتسلسلات فابير. وكذلك تقريب دوال فضاء موري سميرنوف الموزون المعرفة على منطقة بسيطة الترابط ومحاطة بمنحني أملس بالمجاميع الجزئية لمتسلسلات فابير.

References:

[1] D. R. Adams, Morrey Spaces, Springer International Publishing Switzerland: Birkhäuser Cham, 2015.

[2] Y. Sawano, G. D. Fazio and D. I. Hakim, Morrey Spaces Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's, Volumes I & II, CRC Press, 2020.

[3] X. Fan, "Variable exponent Morrey and Campanato spaces," *Nonlinear Anal.,* vol. 72, no. 11, p. 4148–4161, 2010.

[4] M. Izuki, E. Nakai and Y. Sawano, "Function spaces with variable exponent - An introduction," *Scientiae Mathematicae Japonicae*, vol. 77, no. 2, pp. 187-315, 2014.

[5] K. P. Ho, "Fractional integral operators on Hardy local Morrey spaces with variable exponents," *Carpathian Math. Publ.,* vol. 16, pp. 190-202, 2024.

[6] Y. Komori and S. Shirai, "Weighted Morrey spaces and a singular integral operator," *Math. Nachr.,* vol. 282, no. 2, p. 219 – 231, 2009.

[7] M. Laurel and M. Mitrea, Weighted Morrey Spaces: Calderón-Zygmund Theory and Boundary Problems, Berlin, Boston: De Gruyter, 2024.

[8] Y. Ramadana, "Boundedness of generalized fractional integrals on generalized weighted Morrey spaces over metric measure spaces and applications," *Jurnal Matematika UNAND,* vol. 15, no. 1, pp. 1-16, 2026.

[9] T. D. Tran, A Study of Musielak-Orlicz Hardy Spaces, Weighted Morrey Spaces and Boundedness of Operators, Macquarie University, Faculty of Science and Engineering, Department of Mathematics, 2015.

[10] M. Asim, K. Suwais and N. Mlaiki, "Some New Weighted Results for the Hardy Operator on Variable-Exponent λ-central Morrey Space," *ejpam,* vol. 18, no. 4, pp. 1-20, 2025.

[11] N. Samko, "Weighted Hardy and singular operators in Morrey spaces," *J. Math. Anal. Appl.,* vol. 350, no. 1, pp. 56-72, 2009.

[12] D. M. Israfilov and N. P. Tozman, "Approximation by polynomials in morrey-smirnov classes," *East J. Approx.,* vol. 14, no. 3, p. 255–269, 2008.

[13] A. Kinj, M. Ali and S. Mahmoud, "Approximation properties of de la Vall´ee-Poussin sums in Morrey spaces," *SQU J. Sci.,* vol. 22, no. 2, pp. 89-95, 2017.

[14] A. Kinj, M. Ali and S. Mahmoud, "Approximation by Rational Functions in Morrey-Smirnov Classes," *Kuwait Journal of Science,* vol. 45, no. 2, pp. 1-7, 2018.

[15] S. Z. Jafarov, "Estimates of the approximations by Zygmund sums in Morrey-Smirnov classes of analytic functions," *Azerb. J. Math.,* vol. 10, no. 2, pp. 110-124, 2020.

[16] S. Z. Jafarov, "Approximation by means of Fourier trigonometric series in Morrey spaces," *An. Stiint¸. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.),* vol. f. 1, pp. 59-75, 2023.

[17] Z. Cakir, C. Aykol, D. Soylemez and A. Serbetci, "Approximation by trigonometric polynomials in Morrey spaces," *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.,* vol. 39, no. 1, pp. 24-37, 2019.

[18] Z. Cakir, C. Aykol, D. Soylemez and A. Serbetci, "Approximation by trigonometric polynomials in weighted Morrey spaces," *Tbilisi Centre for Mathematical Sciences,* vol. 13, no. 1, pp. 123-138, 2020.

[19] S. Z. Jafarov, "Approximation properties of the deriveatives of de la vallee poussin

means in weighted Lorentz spaces," *Analele Universit˘at¸ii Oradea Fasc. Matematica,* no. 2, p. 91–99, 2025.

[20] D. M. Israfilov and A. Testici, "Simultaneous approximation in Lebesgue space with variable exponent," *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics. National Academy of Sciences of Azerbaijan,* vol. 44, no. 1, 2018.

[21] S. Z. Jafarov, "Derivatives of a polynomial of best approximation and modulus of smoothness in generalized Lebesgue spaces with variable exponent," *Demonstratio Mathematica,* vol. 50, no. 1, pp. 245-251, 2017.

[22] R. Akgün, "Approximating Polynomials for Functions of Weighted Smirnov-Orlicz Spaces," *Journal of Function Spaces and Applications,* vol. 2012, no. 1, pp. 1-41, 2012.

[23] S. Z. Jafarov, "Simultaneous approximation properties of de la Vallée-Poussin means in weighted Orlicz spaces," *J. Class. Anal,* vol. 17, no. 2, pp. 189-198, 2021.

[24] A. Bottcher and Y. Karlovich, Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators, Switzerland: Springer, 2012.

[25] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge: Cambridge University Press, 1959.

[26] S. Samko, A. Kilbas and O. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Netherlands: Taylor & Francis, 1993.

[27] F. Gurbuz, "Weighted Morrey and weighted fractional Sobolev–Morrey spaces estimates for a large class of pseudo-differential operators with smooth symbols," *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.*, vol. 7, p. 595–607, 2016.

[28] D. M. Israfilov and A. Testici, "Approximation by Trigonometric Polynomials in Weighted Morrey Spaces," *Moscow Mathematical Journal,* vol. 24, no. 1, pp. 91-105, 2024.

[29] R. DeVore and G. Lorentz, Constructive Approximation, Berlin: Springer Verlag, 1993.