

"An Analytical and Computational Study of Magnetic Susceptibility from the Quantum Perspective"

Dr. Mohammad Halabi* 

(Received 13 / 12 / 2025. Accepted 25 / 1 / 2026)

□ ABSTRACT □

In this study, we review the stages in the development of understanding magnetic phenomena in materials. We show how materials are classified according to the sign of their magnetic susceptibility into ferromagnetic, paramagnetic, and diamagnetic substances. We then calculate the magnetization in the classical case based on its definition as the sum of the magnetic moments of the system's constituents, following Langevin's theory of magnetization.

In the second part, we introduce the quantum contributions of both the orbital and intrinsic (spin) angular momenta, and we compute the expectation value of the resulting moments in a material placed in an external magnetic field. Our calculations lead to a formula involving the well-known Brillouin function, which forms the foundation for studying magnetism in both classical and quantum regimes; however, in our formulation, it incorporates the total magnetic angular momentum resulting from both orbital and spin motion.

In the final part, we present code implementations for each case and plot the resulting functions after adding a term from the Taylor expansion of the magnetization function. The obtained curves indicate that a correction to the classical results is required, related to the spin-orbit coupling term. A clear agreement appears between the examined curves within the ranges that take into account only the first and second terms.

Keywords: Quantum Theory of Magnetism, Magnetic Susceptibility, Spin Orbit Coupling, Magnetic Momentum, Langevin and Brillouin functions.


Copyright



:Latakia University Journal (Formerly Tishreen) -Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

* Associate Professor, Department of physics, Faculty of Science, Latakia University (Formerly Tishreen), Al-Sham Private University, Latakia, Syria. mhd.halabi.foph.lat@aspu.edu.sy

دراسة تحليلية وبرمجية للطوعية المغناطيسية من وجهة النظر الكوانتية


د. محمد حلبي* 

(تاريخ الإيداع 13 / 12 / 2025. قبل للنشر في 25 / 1 / 2026)

□ ملخص □

منا في هذا البحث باستعراض مراحل تطور دراسة ظاهرة التمغنط للمواد وبيّنا كيف أن المواد تصنف حسب إشارة الطوعية المغناطيسية إلى مواد حديدية التمغنط ومواد ذات مغناطيسية مسايرة وأخرى عكسية المغنطة ثم حساب المغنطة في الحالة الكلاسيكية حسب تعريف المغنطة على أنها مجموع العزوم المغناطيسية لمكونات الجملة المدروسة وذلك حسب نظرية لانجفين في المغنطة. في القسم الثاني أدخلنا المؤثرات الكوانتية للعزم المداري وعزم اللف الذاتي (السبين) وقمنا بحساب القيمة الوسطى للعزوم المتشكلة في المادة الموضوععة في حقل مغناطيسي خارجي. توصلنا بالحسابات إلى صيغة يدخل فيها تابع بريليون المعروف وهو أساس لدراسة المغناطيسية في الحالة الكلاسيكية والكوانتية على حد سواء ولكن هنا يدخل فيه مؤثر العزم الزاوي المغناطيسي الكلي الناتج عن الحركة المدارية والحركة السبينية. في القسم الأخير بنينا كود لكل حالة ورسمنا التوابع بعد إضافة حد في منشور تايلور لتابع المغنطة وتوصلنا من خلال المنحنيات إلى أنه يجب إضافة تصحيح على النتائج الكلاسيكية تتعلق بحد الترابط السبيني المداري ويظهر بشكل واضح التوافق بين المنحنيات المدروسة هنا معتك المدروسة في الحالة الكلاسيكية ضمن المجالات التي تأخذ بعين الاعتبار فقط الحد الأول والثاني.

الكلمات المفتاحية: النظرية الكوانتية المغناطيسية، الطوعية المغناطيسية، الترابط السبيني المداري، العزوم المغناطيسية، تابع لانجفين، تابع بريليون.

حقوق النشر  : مجلة جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً) - سوريا، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب

الترخيص 04 CC BY-NC-SA

* أستاذ مساعد، كلية العلوم، جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً)، جامعة الشام الخاصة، اللاذقية، سوريا.
mhd.halabi.foph.lat@aspu.edu.sy

مقدمة:

تستخدم المواد المختلفة (معادن وغيرها....) لتخزين المعلومات في أجهزة الكمبيوتر والأنظمة البرمجية الأخرى على أقراص مختلفة الأنواع والأشكال، كما تستخدم أجهزة كثيرة (أغلب الأجهزة الإلكترونية) منظومات تحكّم لتشغيلها. لفهم كيفية تركيبها وأدائها والية تشغيلها يتوجب علينا معرفة دقيقة بالنظرية المغناطيسية للمادة. تطورت النظري المغناطيسية على مدى قرنين من الزمن من نظرية كلاسيكية بدأت مع فاراداي وماكسويل وكوري الى ان ظهر ميكانيك الكم في أوائل القرن العشرين على أيدي بور، ديبروي شرودينجر هايزنبرك وغيرهم. تقود الدراسة الكمية للمقادير الفيزيائية لتفسير أغلب الظواهر التي عجزت عنها الدراسة الكلاسيكية مثل المغنطة المسايرة (Paramagnetism)، انقسام الخطوط الطيفية في طيف الأشعة السينية، والتجاوب السبيني المغناطيسي (الرنين المغناطيسي). تتشكل المغنطة بشكل أساسي من العزوم المغناطيسية التي تنشأ عن حركة الشحنات الكهربائية أو اهتزازها في داخل المادة. يكمن فهم هذه الظواهر في النظرية الكوانتية للمغنطة أي فهم آلية عمل سبين الإلكترون (عزم اللف الذاتي للإلكترون حول نفسه) في منشأ المغنطة. يشكل عزم اللف الذاتي للإلكترون (Electron Spin) أحد المفاعيل الأساسية في منشأ المغنطة في المادة وهو كمية كوانتية ليس لها نظير في الفيزياء الكلاسيكية. استطاعت نظرية السبين تفسير أغلب خفايا الظواهر المغناطيسية التي عجزت عن تفسيرها الفيزياء الكلاسيكية. من هنا تأتي أهمية هذه الدراسة الكمية للمغنطة والمقادير الفيزيائية الأخرى وإدخال عزم اللف الذاتي الى العلاقات والمعادلات (الى معادلة شرودينجر -ديراك) والتي تصف تصرف المادة في الأوساط المختلفة. تعطي العلاقة بين المقادير الفيزيائية المدروسة في النظرية الكلاسيكية بالعلاقة الآتية [1].

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (1)$$

حيث: \vec{B} حقل التحريض المغناطيسي و \vec{H} الحقل الخارجي المؤثر على الجملة المدروسة متجه المغنطة في المادة \vec{M} و μ_0 السماحية المغناطيسية (permittivity of space) كما ترتبط المغنطة مع الحقل الخارجي بالعلاقة الآتية:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (2) \quad \text{حيث } \chi_m \text{ ثابت التناسب ويسمى}$$

الطواعية المغناطيسية (Magnetic Susceptibility of materials).

تقسم المواد في النظرية المغناطيسية الى ثلاثة أقسام رئيسة حسب قيمة الطواعية المغناطيسية وإشارتها كما يلي [2]:

- 1 - $\chi_m < 0$ تسمى المواد في هذه الحالة ذات المغناطيسية العكسية (diamagnetic).
- 2 - $\chi_m > 0$ تسمى المواد في هذه الحالة ذات المغناطيسية المسايرة (paramagnetic).
- 3 - $\chi_m \gg 1$ تسمى المواد في هذه الحالة بالمواد ذات المغنطة الدائمة (ferromagnetic).

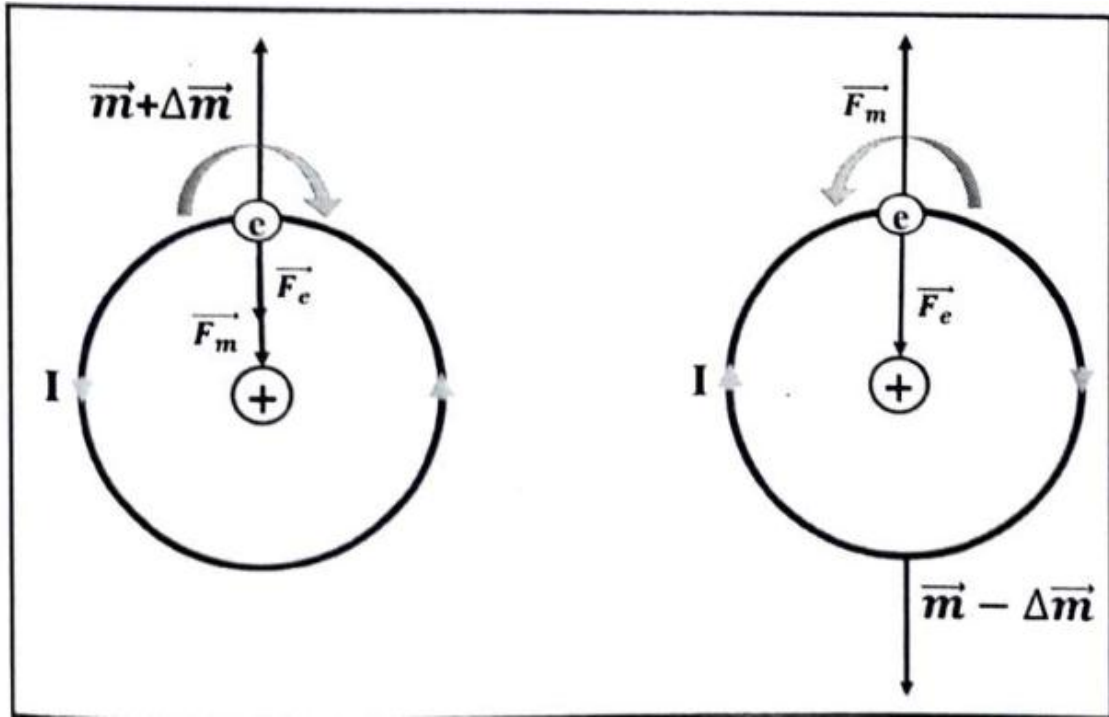
تنشأ المغنطة داخل المادة بالتالي يجب أن نعلم هنا ان χ_m هو مقدار يتعلّق بالحجم (bulk parameter) أي مقدار جهري (macroscopic)، وبما ان منشأ المغنطة يعود الى مكونات المادة بالتالي فهو مقدار كمي أي مجهري (microscopic) لذلك تتطلب دراسة المغنطة حساب العزوم المغناطيسية للذرات والإلكترونات أو لجملة أيونات. يمكن دراسة العزوم المغناطيسية بعدة طرق أولها الدراسة الكلاسيكية التي أعطت نتائج تقريبية للطواعية المغناطيسية، أو بطريقة إحصائية كما فعل لانجفين وكوري. بنتيجة دراسة لانجفين بالطريقة الإحصائية توصل لحساب الطواعية

المغناطيسية كتابع لدرجة الحرارة كما تبين العلاقة التالية [4]. $\chi_{para} = \frac{N\mu_m^2 \cdot \mu_0}{3k_B T}$ ، الشكل الآتي يوضح كيفية توزع عزوم الإلكترونات بوجود حقل مغناطيسي خارجي الشكل (1) أدناه.



الشكل (1)

في الشكل (1) من اليسار الى اليمين - حقل مغناطيسي معدوم - درجة الحرارة صفر مع وجود حقل مغناطيسي - درجة الحرارة لا تساوي صفر مع وجود حقل مغناطيس خارجي. وفي الشكل (2) نبين كيف تنتج محصلة العزوم المغناطيسية في الذرة [2].



الشكل (2)

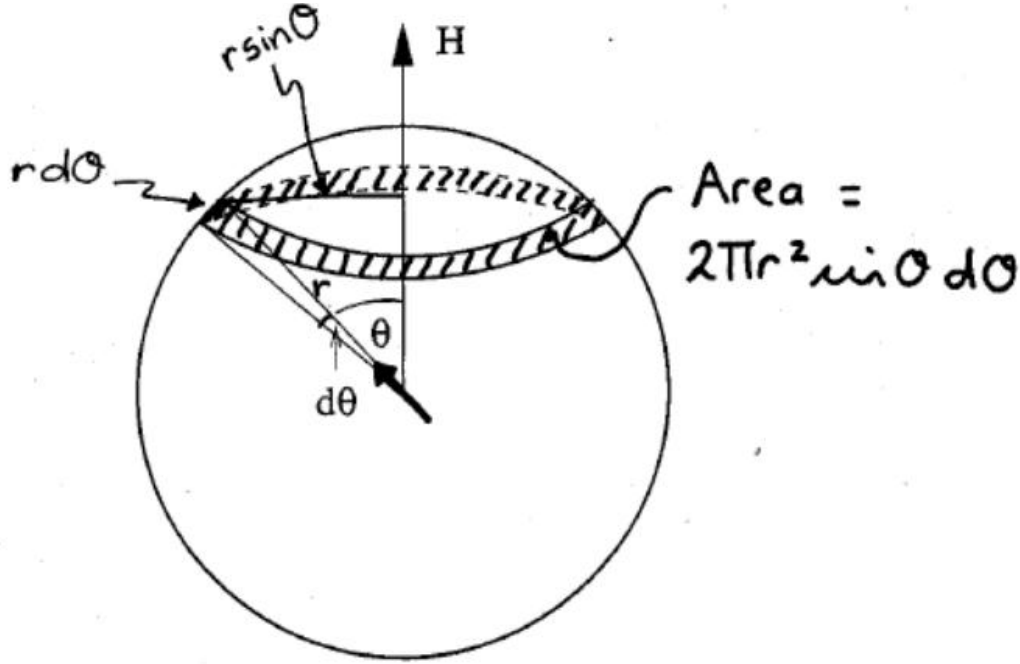
حسب كوري من الشكل (2) المغنطة والطواعية المغناطيسية كما يلي: $\Delta m = -\frac{e^2 r^2 B}{4m_e}$ ثم أخذ مجموع العزوم وحسب وسطي مربع r كما يلي: $\Delta m = -\frac{e^2 B}{4m_e} \langle r^2 \rangle$ حيث r : نصف قطر مدار الإلكترون عن محور Z و \vec{B} الحقل المغناطيسي الخارجي وهو ينطبق في هذه الحالة على المحور Z . أفترض كوري ان العزوم حرة ولا تتبادل التأثير فيما بينها وحسب عدد العزوم في المجال الطاقى بين $E, E + \Delta E$ وفق توزع ماكسويل - بولتزمان بالعلاقات الآتية [3]:

$$dN = e^{\frac{-E}{k_B T}} dE , dE = \mu_m B \cos\theta \quad (3)$$

ينتج عن تكامل العلاقات (3) علاقة المغنطة المتشكلة في المادة بوجود حقل مغناطيسي:

$$M = \int_0^\pi \mu_m \cos\theta dN = M_s L(x) \quad (4)$$

يوضح الشكل (3) الآتي كيفية إجراء التكاملات للعلاقات (4):



الشكل (3)

حيث $L(x)$ تابع لانجفين : $L(x)$ يعطى بالصيغة الرياضية الآتية:

$$M_s = N \mu_m \quad , \quad L(x) = \coth x - \frac{1}{x} \quad , \quad x = \frac{\mu_m B}{k_B T}$$

من أجل $B \gg 1$, $T \ll 1$, $M \rightarrow M_s$

$$\coth(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \dots \dots \dots (5)$$

وهنا تم استخدام منشور تايلور للتابع (5) والتعويض عن المنشور في تابع لانجفين لحساب النهايات الحدية المدروسة. الحالة المأخوذة هنا هي حالة المغنطة العظمى (حالة الإشباع ، Saturation) حيث تكون جميع العزوم المغناطيسية متوضعة باتجاه الحقل الخارجي [4,5].

الحالة الأخرى هي كون $x \ll 1 \Rightarrow M = M_s \left(\frac{x}{3}\right)$

$$\square = \frac{M}{H} = \square_{para} = \frac{M_s \left(\frac{x}{3}\right)}{H} \quad \text{عندها}$$

$$\square_{para} = \left(\frac{N \mu_m^2 \mu_0}{3 k_B} \right) \cdot \frac{1}{T} \quad (6)$$

تظهر هذه العلاقة التناسب العكسي بين الطواعية المغناطيسية ودرجة الحرارة وهذا ما تؤيده التجربة وهذه النتيجة معروفة جيداً للمواد طردية المغنطة [6].

وهو قانون كوري في المغناطيسية ويسمى المقدار $c_{Curie} = \frac{N \mu_m^2 \mu_0}{3 k_B}$ ثابت كوري (Curie constant). الدراسة الكلاسيكية أعلاه للمغنطة موجودة بإسهاب في العديد من المراجع وضعت هنا للمقارنة لاحقاً مع النموذج الكمي للمغنطة والطواعية المغناطيسية [6,7].

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية هذا البحث من كونه يشمل مقارنة بين الدراسة الكلاسيكية للمغنتية والطوعية المغناطيسية والدراسة الكمية وتبيان الفروقات والتصحيحات التي يجب أخذها بعين الاعتبار. كذلك يعطي نتيجة للطوعية المغناطيسية بمراتب عليا من منشور تايلور لتابع بريليون مع بناء كود برمجي لرسم مخطط تغير المقادير الفيزيائية العلاقات الناتجة ضمن مجال يتضمن القيم الحدية المهمة للحقل المغناطيسي الخارجي ودرجة الحرارة.

طرائق البحث ومواده:

هناك العديد من الطرق الرياضيّة والنماذج الفيزيائية لدراسة الخواص المغناطيسية للمادة [1,8,9] هنا سوف ندرس نموذج ذرة واحدة أو أيون أو جزمة من الإلكترونات الحرة، الذرة أو الأيون تملك طبقة الكترونية خارجية وحيدة ممثلة جزئياً، وتملك طبقات أخرى داخلية ممثلة تماماً تشكل اللب النووي. في هذه الحالة يكون العزم الزاوي الكلي المداري. والسبني معدوم للطبقات الممتلئة بسبب قواعد هوند، مبدأ الاستبعاد لبولي ومبدأ الأوفباو لبناء الذرة (Hund's Rules, Paoli principle, Aufbau principle) في هذا النموذج تأتي المساهمة في العزم المغناطيسي الكلي فقط من الكترونات الطبقة الخارجية الممتلئة جزئياً بالإلكترونات. توجد دراسات أخرى عديدة أخذت نموذج الغاز الإلكتروني أو البوزوني لدراسة الخواص المغناطيسية للمادة [10,11] في هذه الدراسات تم تطبيق أحصاء فيرمي - ديرك أو بوز أينشتاين على جزمة العزوم المغناطيسية المتشكلة في المادة ثم تم حساب المغنتية والطوعية المغناطيسية للجمل المختلفة بالطرق الإحصائية المعروفة أو عن طريق تابع التحاصص للجزمة.

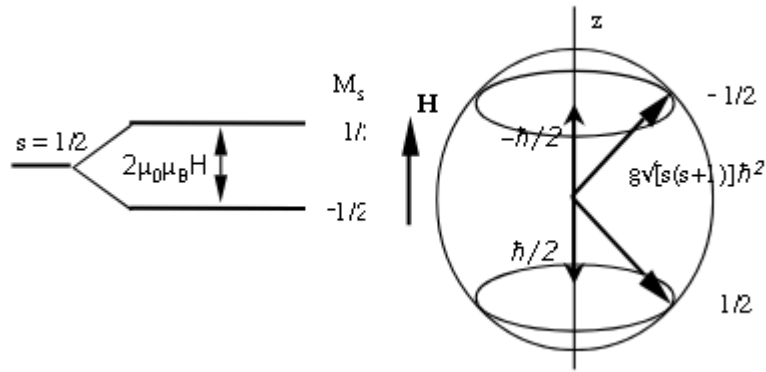
نتنقل من الدراسة الكلاسيكية الى الدراسة الكمية بتحويل المقادير الفيزيائية الى المؤثرات الكوانتية وفق التحويلات الآتية:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} , P \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} , x \rightarrow x \quad (7)$$

هذه التحويلات عبارة عن مؤثرات كوانتية تحول العلاقات والمعادلات من الفيزياء الكلاسيكية الى معادلات وعلاقات في ميكانيك الكم. نتقلنا هذه المؤثرات الى معدلة شرودينجر ومعادلة ديرك اللتين بنتيجة الحل ظهرت السويات الطاقية المنفصلة والسلاسل الطيفية واهم من كل ذلك عزم اللف الذاتي للإلكترون السبين.

تبين الدراسة النظرية والتجريبية أن مفهوم السبين ليس له نظير كلاسيكي. كما تبين هذه الدراسات ان سبين الجسم وحركته المدارية هما المسؤولان عن منشأ المغنتية في المواد المختلفة. في الدراسة الكلاسيكية تم أخذ مجموع العزوم المغناطيسية دون الأخذ بعين الاعتبار للسبين والعلاقة بين العزم السبيني والعزم المداري. سوف نقوم هنا بإدخال هذه العزوم لتفسير ظاهرة المغنتية في المادة.

يجب أخذ السبين بعين الاعتبار وحل معادلة ديرك الكمية لإيجاد التوابع الموجية وطاقة السويات المختلفة للذرة، لأن السبين هو مفهوم كمي نقي ليس له مقابل في الميكانيك الكلاسيكي. تحل معادلة ديرك والنظرية النسبية مسألة سبين الإلكترون بافتراض الإلكترون نقطة في الفراغ يمتلك عزم مغناطيسي ذاتي $m_s = \pm \frac{1}{2}$ يوضحه الشكل (4) الآتي [12,13]: في هذا الشكل يظهر وجود قيمتين للسبين ويظهر الفرق في الطاقة بين السويتين في حال وجود حقل مغناطيسي خارجي وهذ هو مفعول زيمان في ميكانيك الكم.



الشكل (4)

ويكون العزم المغناطيسي الكلي وفق قوانين الكم مساوياً الى مجموع العزوم الزاوية المدارية ذاتاً العزوم السبينية أي: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ، وهذه المقادير هنا هي مقادير كمية ينتج عنها حدود تصحيحية للمقادير الفيزيائية المدروسة وفق الميكانيك الكلاسيكي. من أهم نتائج تطبيق قوانين الكم في المغناطيسية هو حدّ التأثير المتبادل السبيني - المداري (Spin-Orbit Interaction)، هذا التكميم مع تكميم التوزع المكاني للشحنة وقوانين الفيزياء الإحصائية أعطى في النتائج التطبيقية فرقا كبيراً بين حالة المغناطيسية المعاكسة والمغناطيسية المسايرة.

يكتب الهاملتوني لحدّ الترابط السبيني المداري بالعلاقة التالية [1]:

$$H_{s-o} = \mu_B (\vec{L} + g\vec{S}) \cdot \vec{B} \quad (8)$$

حيث: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ، $g = 2$ العزم الزاوي الكلي ومعامل لاندى (Lande Factor) على التوالي.

$$J = |L - S| \dots \dots \dots |L + S| \quad (9)$$

يعطى معامل لاندى (يساوي تقريباً 2 للإلكترون) بالعلاقة الآتية:

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

نعتبر الحقل المغناطيسي الخارجي وفق المحور Z كما نعتبر هذا المحور هو محور التكميم للعزوم الزاوية $\vec{J}, \vec{L}, \vec{S}$ وفق هذه المعطيات يكون العزم الزاوي الكلي $\vec{m}_j = -g_j \frac{e}{2m_e} \vec{J}$ ، وبما ان العزم الزاوي الكلي يأخذ القيم كما في (9) بالتالي لحساب مجموع العزوم على جميع القيم المختلفة للعزم الزاوي الكلي والذي بدوره يساوي الى المغنطة المتشكلة في المادة (حسب تعريف المغنطة) فهي تساوي الى مجموع العزوم المغناطيسية في واحدة الحجم). كما رأينا سابقاً في الدراسة الكلاسيكية، تعرّف المغنطة على أنها مجموع العزوم المغناطيسية في واحدة الحجم وتعطى بتابعية تابع التحاص (Z_1) كما يلي:

$$\frac{1}{Z_1^{(L)}} \frac{\partial Z_1^{(L)}}{\partial B_0} = \frac{\sinh(\frac{1}{2}b)}{\sinh(b(L + \frac{1}{2}))} \left\{ \frac{\sinh(\frac{1}{2}b) \beta \mu_B (L + \frac{1}{2}) \cosh(b(L + \frac{1}{2}))}{\sinh^2(\frac{1}{2}b)} - \frac{\frac{1}{2} \beta \mu_B \cosh(\frac{1}{b}) \sinh(b(L + \frac{1}{2}))}{\sinh^2(\frac{1}{2}b)} \right\} \quad ((10))$$

أو على الشكل المصفوفي الآتي:

$$M = \langle -g_j \mu_B j \rangle = \frac{\text{Tr}[g_j \mu_B j e^{-g_j \mu_B j B / K_B T}]}{\text{Tr}[e^{-\frac{g_j \mu_B j B}{K_B T}}]} = K_B T \frac{\partial}{\partial B} \text{Ln} \left[\text{Tr} \frac{-g_j \mu_B j B}{K_B T} \right] \quad (11)$$

حيث (Tr) يرمز لإثر مؤثر كمي وهو يساوي الى مجموع الحدود القطرية لمصفوفة هذا المؤثر وهو عدد يرافق أي مؤثر كوانتي في فراغ هيلبرت ويمكن أن يكون عقدياً أو ∞ ويأخذ في ميكانيك الكم الشكل الآتي:

$$\text{Tr}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi_n | T | \phi_n \rangle$$

$$\text{Trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

هذا يعني ان المجموع على العزوم المغناطيسية مأخوذ على جميع الجسيمات مع اهمال الحدود المختلطة. كذلك المؤثر Tr له أبعاد مصفوفة في ميكانيك الكم بسبب كون مؤثر السبين مكون من مصفوفات باولي.

$$\langle M_z \rangle = M_s B_j (\beta g \mu_B J B) \quad (12)$$

$$B_j(x) = \frac{2j+1}{2j} \coth\left(\frac{2j+1}{2j}x\right) - \frac{1}{2j} \coth\left(\frac{x}{2j}\right) \quad (13) \quad \text{حيث:}$$

وهو تابع بريليون المعروف وهو يدخل في حساب المغنطة والطواعية المغناطيسية في جميع الحالات مع الاختلاف في العاملات الداخلة فيه لكل حالة على حده.

تم استنتاج الصيغة (10) من تابع التخاص للمجموعة القانونية الإحصائية وفق الخطوات الرياضية الآتية:

$$Z_s = e^{-sy} = \sum_{k=0}^{2s} (e^y)^k = e^{-sy} \cdot \frac{e^{(2s+1)y} - 1}{e^y - 1} = \frac{e^{(s+\frac{1}{2})y} - e^{-(s+\frac{1}{2})y}}{e^{\frac{y}{2}} - e^{-\frac{y}{2}}}$$

$$= \frac{\sinh[(s + \frac{1}{2})y]}{\sinh(\frac{y}{2})}$$

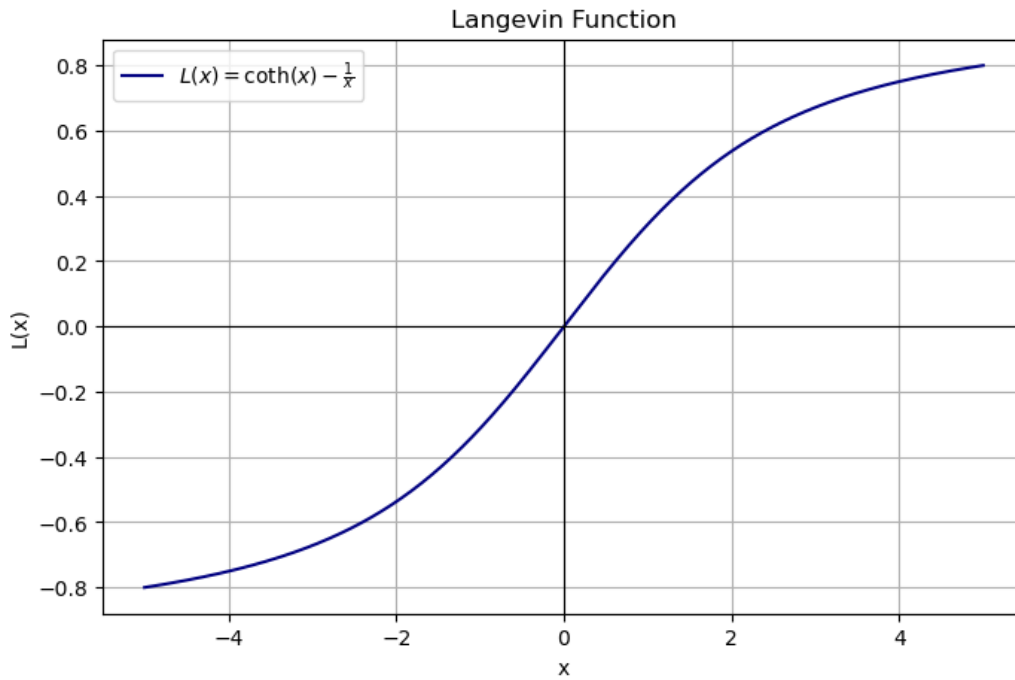
وبما ان: $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

$$Z_{\frac{1}{2}} = 2\cosh\left(\frac{y}{2}\right) \quad \text{نستطيع ان نكتب تابع التخاص بالشكل الآتي:}$$

يمكننا الحصول على جميع المقادير الفيزيائية التي نرغب في حسابها إحصائياً من تابع التخاص كما هو وارد بالنسبة لحساب المغنطة في العلاقة (10)، كما ان تابع التخاص (Partition Function). هو المقدار الأساسي المستخدم في الترموديناميك لحساب جميع المقادير الفيزيائية بالطرق الإحصائية الكلاسيكية. يأخذ المجموع والأثر في العلاقة (11) معنى كمي لوجد العزم الزاوي الكلي المكتم.

<pre> import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt # Define the Langevin function def L(x): # handle x=0 case to avoid division by zero Lx = np.cosh(x)/np.sinh(x) - 1/x Lx[np.isnan(Lx)] = 0 # set L(0) = 0 return Lx # Generate x values x = np.linspace(-5, 5, 500) x = x[x != 0] # avoid division by zero for plotting y = L(x) </pre>	<pre> # Plot plt.figure(figsize=(8,5)) plt.plot(x, y, label=r"\$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}\$", color='navy') plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.8) plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.8) plt.title("Langevin Function") plt.xlabel("x") plt.ylabel("L(x)") plt.legend() plt.grid(True) plt.show() </pre>
--	---

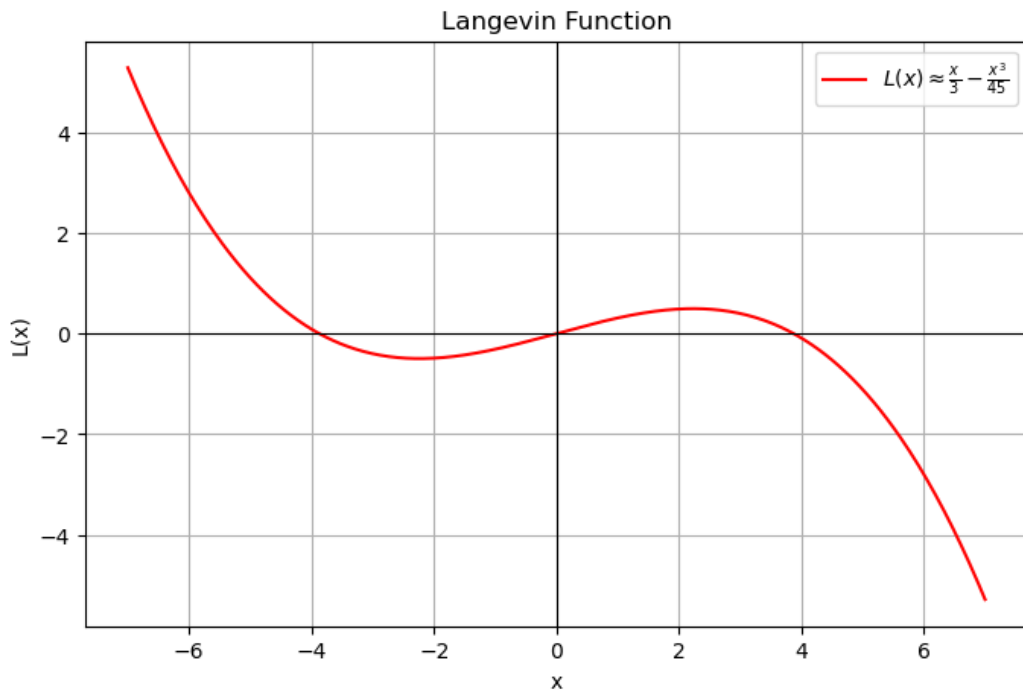
في الشكل (5) أدناه رسمنا تابع لانجفين بحددين فقط في هذا الشكل يظهر الظل القطعي كاملاً بينما تأخذ المغنطة القسم المرسوم في الربع الأول فقط والسبب هو كون الطواعية المغناطيسية في حالة المغناطيسية المسايرة موجبة. في حين ان الطواعية المغناطيسية في حالة المغناطيسية العكسية سالبة عندنا تأخذ الحالة السالبة من المنحني.



الشكل (5)

<pre> # Define the Langevin function def Langevin(x): # handle x=0 case to avoid division by zero Lx = x/3 - x**3/45 return Lx # Generate x values x = np.linspace(-7, 7, 500) y = Langevin(x) </pre>	<pre> # Plot plt.figure(figsize=(8,5)) plt.plot(x, y, label=r"\$L(x) \approx \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45}\$", color='red') plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.8) plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.8) plt.title("Langevin Function") plt.xlabel("x") plt.ylabel("L(x)") plt.legend() plt.grid(True) plt.show() </pre>
---	--

في الكود الثاني أخذنا حدود من المرتب الثانية ورسمنا تابع لانجفين ونجد الفرق في تغير المنحني وهذا يعني انه لا يمكن اهمال الحدود من الراتب العليا من تابع لانجفين في دراسة المغنطة.

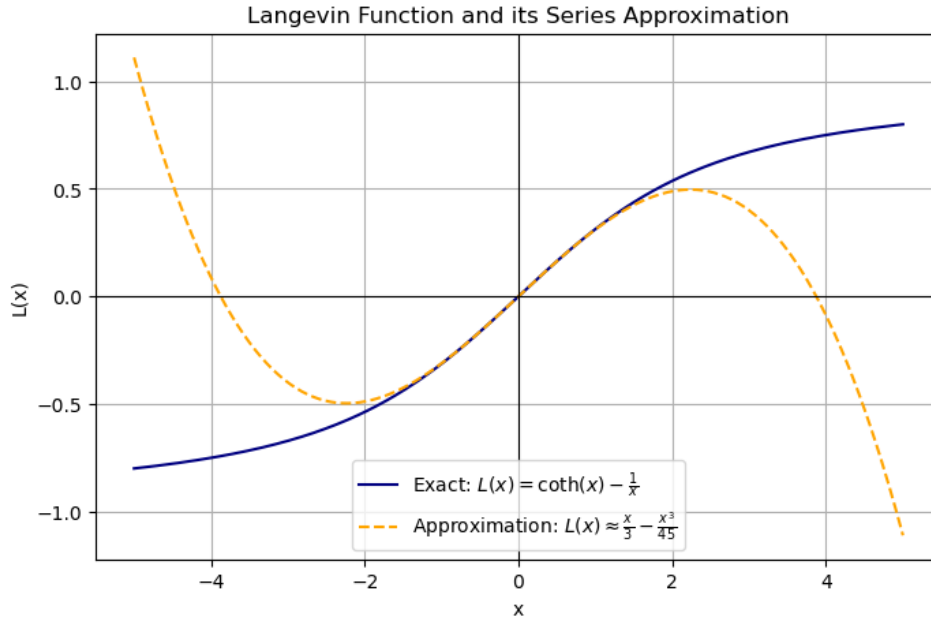


الشكل (6)

في الأكواد الآتية نستطيع رسم التابع المعمم (تابع بريليون) ورسم المنحنيات التي تصف تصرف المغنطة في المادة في الحالة الكوانتية بتابعية العزم الزاوي الكلي بمراتب عليا من حدود تايلور في منشور الظل القطعي.

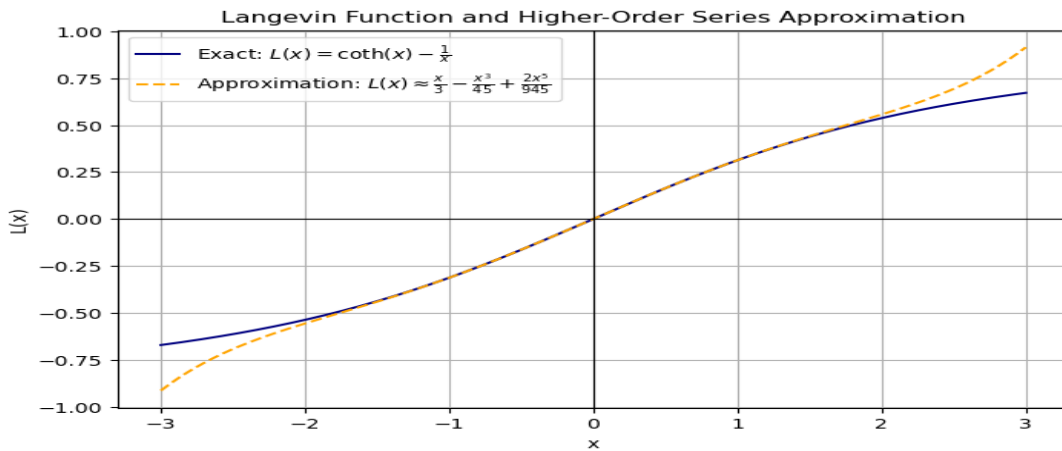
<pre>import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt # Define functions def L_exact(x): return 1 / np.tanh(x) - 1 / x def L_taylor(x): return x/3 - x**3/45 # x values x = np.linspace(-5, 5, 400) x = x[x != 0] y_exact = L_exact(x) y_taylor = L_taylor(x)</pre>	<pre># Plot plt.figure(figsize=(8,5)) plt.plot(x, y_exact, label=r"Exact: \$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}\$", color='navy') plt.plot(x, y_taylor, '--', label=r"Approximation: \$L(x) \approx \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45}\$", color='orange') plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.8) plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.8) plt.title("Langevin Function and its Series Approximation") plt.xlabel("x") plt.ylabel("L(x)") plt.legend() plt.grid(True) plt.show()</pre>
--	---

في الشكل (7) المبين أدناه نلاحظ التغير الواضح عند الأخذ بعين الاعتبار حدود عليا من المنشور.



الشكل (7)

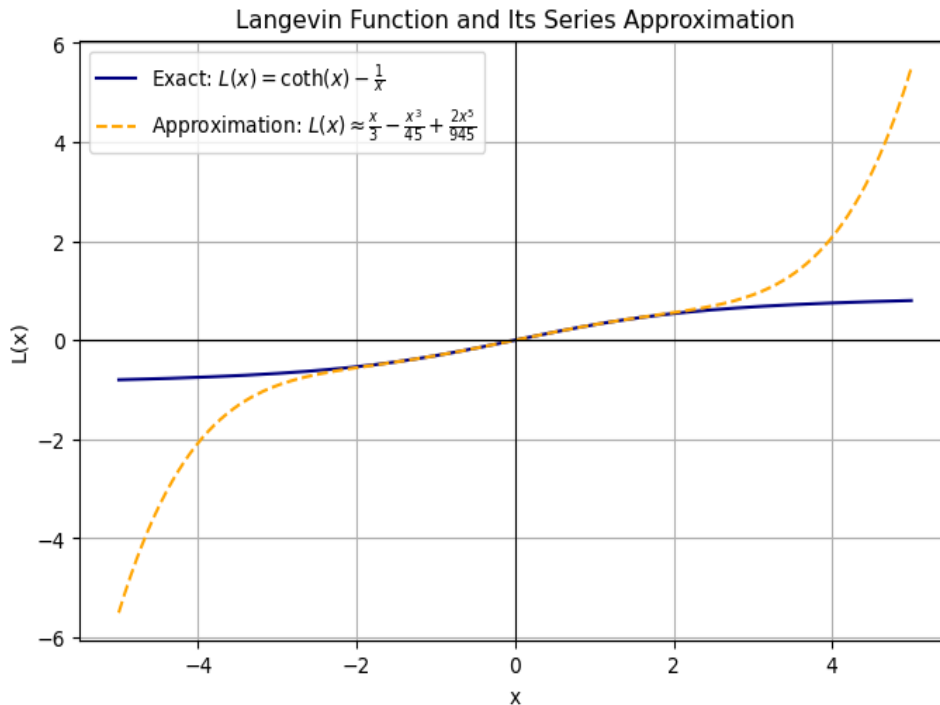
<pre># Define functions def L_exact(x): return 1 / np.tanh(x) - 1 / x def L_taylor(x): return x/3 - x**3/45 + (2 * x**5) / 945 # x values x = np.linspace(-3, 3, 300) x = x[x != 0] y_exact = L_exact(x) y_taylor = L_taylor(x)</pre>	<pre># Plot plt.figure(figsize=(8,5)) plt.plot(x, y_exact, label=r"Exact: \$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}\$", color='navy') plt.plot(x, y_taylor, '--', label=r"Approximation: \$L(x) \approx \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945}\$", color='orange') plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.8) plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.8) plt.title("Langevin Function and Higher-Order Series Approximation") plt.xlabel("x") plt.ylabel("L(x)") plt.legend() plt.grid(True) plt.show()</pre>
--	--



الشكل (8)

<pre># Define functions def L_exact(x): return 1 / np.tanh(x) - 1 / x def L_taylor(x): return x/3 - x**3/45 + (2 * x**5) / 945 # x values x = np.linspace(-5, 5, 400) x = x[x != 0] # avoid division by zero y_exact = L_exact(x) y_taylor = L_taylor(x)</pre>	<pre># Plot plt.figure(figsize=(8, 5)) plt.plot(x, y_exact, label="Exact: \$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}\$", color='navy') plt.plot(x, y_taylor, '--', label="Approximation: \$L(x) \approx \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945}\$", color='orange') plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.8) plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.8) plt.title("Langevin Function and Its Series Approximation") plt.xlabel("x") plt.ylabel("L(x)") plt.legend() plt.grid(True) plt.show()</pre>
--	---

في الشكل (9) التالي رسمنا تابع لانجفين مع اخذ حدّين إضافيين من منشور تايلور.



الشكل (9)

في الأشكال المختلفة السابقة تم رسم تابع لانجفين للمغطة بتابعية المعامل $(\vec{J} = \vec{L} + \vec{S})$ العزم الزاوي المغناطيسي الكلي وهو كمية كوانتية نقية حيث يسمى تابع لانجفين في هذه الحالة تابع بريليون. نلاحظ الاختلاف الواضح بين استخدام تابع لانجفين الكلاسيكي وتابع بريليون الكمي من خلال التغير في المنحنيات السابقة وهذا التصحيح يمكن إضافته إلى علاقة المغطة.

الاستنتاجات والتوصيات:

وجدنا من خلال الحسابات الكمية علاقة المغنطة في جملة ذات مغناطيسية مسايرة ثم استنتجنا علاقة الطوعية المغناطيسية في هذه الحالة. وجدنا ان العلاقات تتبع بشكل أساسي لتابع بريليون الذي بدوره تابع للعزم الزاوي المغناطيسي الكلي. كما نلاحظ من المنحنيات المرسومة لهذه التوابع تتطابق مع ما هو معوف في البحوث السابقة في هذا المجال.

يحقق تابع لانجفين الذي وجدناه في الدراسة الكلاسيكية للمغنطة العلاقة الآتية: تابع النجفي الكلاسيكي هو نهاية حدي لتابع بريليون

$$B_{\infty}(x) \rightarrow L(x)$$

تصل المغنطة الى ما يسمى حالة الاشباع عند حقل مغناطيسي شديد ودرجة حرارة منخفضة أي عند النهاية:

$$B \rightarrow \infty , \quad T \rightarrow 0$$

في هذه الحالة تكون جميع العزوم المغناطيسية لمكونات الجملة المدروسة منتظمة وموازية للقل المغناطيسي الخارجي وهذ يتفق مع المنحنيات المدروسة هنا. تنتج هذه الحالة نظرياً من تابع لانجفين في الحالة الكلاسيكية ومن تابع بريليون في الحالة الكوانتية.

درسنا في هذا البحث أثر خواص الإلكترون الكمية على المقادير المغناطيسية من خلال إدخال حدّ الترابط السبيني المداري في هاميلتوني الطاقة وأدخل الحدّ الثالث في منشور تابلور للظل القطعي من تابع بريليون. ويمكن لاحقاً إدخال حدود مهمة هنا في هذه الدراسة مثل حدّ داروين والتصحيح النسبوي وإعادة حلّ مسألة المغنطة على أسس إحصائية كمية. من جهة ثانية تثبت هذه الدراسة صحة الخطوات المتبعة وفق نظرية الاضطراب لدراسة المغنطة وحساب الطوعية المغناطيسية لإن الحدود التي تم إضافتها هنا هي حد الترابط السبيني - المداري وقيمتها صغيرة مقترنة مع الهاملتوني المكون من حدي الطاقة الحركية والطاقة الكامنة. تلعب الآثار النسبوية دوراً مهماً في الظواهر المغناطيسية حيث سرعة الإلكترون على مدها كبية وتساوي الى 0.7 من سرع الضوء وبالتالي لفهم أعمق للمغنطة يتوجب إضافة التصحيح النسبوي الى الهاملتوني وحل معادلة ديراك. هناك أيضاً أثر التفاعل سبين-سبين الذي يظهر في دراسة التجاوب السبيني وهو أساس التطبيقات في مجال التشخيص الطبي والتطبيقات في الكشف عن طبيعة المواد وتركيبها البنيوي والإلكتروني. توجد عوامل كثيرة تساهم في منشأ المغنطة وقد ذكرنا بعضها هنا ونتمنى ان نستطيع نحن وغيرنا ممن يهتم في هذا المجال ان نتابع هذه الدراسة للكشف أكثر عن خفايا الظاهرة المغناطيسية للمواد في عالمنا.

References:

- [1] N.A Spaldin, Magnetic Material, Fundamental and Application, Second Edition, University of California Santa Barbara ,chapter 5. (2011),
- [2] M.S.Desselhaus, Solid State Physics part 111, Magnetic Properties of Solid (2008), chapter4.
- [3] W. Nolting and A. Ramakanth, Quantum Theory of Magnetism, Sprigger-Verlag Berlin Heidelberg, chapters 2,4. (2009).
- [4] C. Timm and T. K. Muller, Theory of Magnetism, Dresden Germany, chapter 7. (2019).
- [5] H. Haken and H.C. Wolf, Springer – Verlag, Berlin Heidelberg Germany, chapter 12. (2005).
- [6] M. Dresselhaus, G. Dresselhaus, S. B. Gronin and A. G. S. Filho, Solid State properties From Bulk to Nano. Spriger <http://WWW.Springer.com/series/6431>, chapter2. (2018).
- [7] H. S.Shirka, S. D.Shide, Solid State Physics, ACS College Phule Pune University, India, Unit 2 (2022).

- [8] J.M.D. ey, Magnetism and Magnetic Materials, WWW.Cambridge.org/9780521816144, University Press. Chapter 9. (2009).
- [9] J.T.M. Walraven, Atomic physics Lectures, University of Amsterdam, chapters 3,4. (2025).
- [10] S. Katsumoto, Lecture Note on Magnetism, Institute for Solid State Physics, University of Tokyo, Chapters (1,3,9). (2022).
- [11] V. Sionet, Atomic Magnetic Moment, Istitute Neel, CNRS, University Grenoble France, ESM, Brno,P.18. (2019).