Maximal Convergence of Faber-Laurent Series in Morrey-Smirnov Spaces

Shahem AlDahruj[*]
Dr. Ahmed Kinj[**]
Dr. Mohamad Ali[***]

(Received 30 / 8 / 2025. Accepted 25 / 1 / 2026)

□ ABSTRACT □

Let G be a finite domain in the complex plane $\mathbb{C}$ and let f be analytic function in G belongs to the Morrey-Smirnov spaces $E^{p,\lambda}(G)$, $1 < p < \infty$, $0 < \lambda \leq 1$ .It is known that if the domain G is simple connected and bounded by rectifiable Jordan curve Γ then, the function f can be expanded in a Faber series of the form $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j F_j(z) , z \in \bar{G}$, where a_j are Faber series coefficients and $F_j(z)$ are Faber polynomials. if G is double connected domain and bounded by two rectifiable Jordan curves Γ and Γ' ,then the function f can be expanded in a power series of the form $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j F_j(z) + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{b}_j \tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \in G$, which is called Faber-laurent series for the function f, where a_j،b_j are Faber-laurent series coefficients and $F_j(z), \tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right)$ are Faber-laurent polynomials of f. In this research, we study the properties of maximal convergence of the partial sums of the Faber-Laurent series for analytic functions in the double connected domain G, belonging to the Morrey-Smirnov spaces $E^{p,\lambda}(G)$, $1 < p < \infty$, $0 < \lambda \leq 1$.

Keywords: Faber polynomials, Faber series, Faber-Laurent series, Morrey-Smirnov spaces, Maximal convergence.

[*] **Postgraduate student (Master), Department of Mathematics, Faculty of Science, Lattakia University (Formerly Tishreen), Latakia, Syria, shahem.dahruj@tishreen.edu.sy.**
[**] **Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Lattakia University (Formerly Tishreen), Lattakia, Syria. ahmed.kinj@latakia-univ.edu.sy**
[***] **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Lattakia University (Formerly Tishreen), Lattakia, Syria.**

التقارب الأعظمي لمتسلسلات فابير–لورنت في فضاءات موري–سميرنوف

شهم الدحروج *

د. أحمد كنج **

د. محمد علي ***

(تاريخ الإيداع 30 / 8 / 2025. قبل للنشر في 25 / 1 / 2026)

□ ملخّص □

لتكن G منطقة محدودة في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ولتكن f دالة تحليلية في المنطقة G وتنتمي إلى فضاء موري–سميرنوف $E^{p,\lambda}(G)$ حيث $1 < p < \infty$ و $0 < \lambda \leq 1$. من المعلوم أنه اذا كانت المنطقة G بسيطة الترابط ومحاطة بمنحني جوردان Γ محدود الطول، فإن الدالة f يمكن نشرها في متسلسلة فابير من الشكل $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j F_j(z), z \in \bar{G}$، حيث a_j أمثال متسلسلة فابير و $F_j(z)$ كثيرات حدود فابير. أما اذا كانت المنطقة G ثنائية الترابط ومحاطة بمنحنيي جوردان Γ و Γ' محدودي الطول، فإن الدالة f يمكن نشرها في متسلسلة قوى من الشكل $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j F_j(z) + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{b}_j \tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \in G$ والتي تدعى متسلسلة فابير–لورنت للدالة f حيث a_j،$\tilde{b}_j$ هي أمثال متسلسلة فابير–لورنت و $F_j(z)$، $\tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right)$ هي كثيرات حدود فابير–لورنت للدالة f. قمنا في هذا البحث بدراسة خواص التقارب الأعظمي للمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير–لورنت من أجل الدوال التحليلية في المنطقة ثنائية الترابط G والتي تنتمي إلى فضاءات موري –سميرنوف $E^{p,\lambda}(G)$، حيث $1 < p < \infty$ و $0 < \lambda \leq 1$.

الكلمات المفتاحية: كثيرات حدود فابير، متسلسلة فابير، متسلسلات فابير–لورنت ،فضاءات موري–سميرنوف، التقارب الأعظمي.

* طالب (ماجستير)، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً)، اللاذقية، سوريا shahem.dahruj@tishreen.edu.sy

** مدرس، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً)، اللاذقية، سوريا، ahmed.kinj@latakia-univ.edu.sy

*** أستاذ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً)، اللاذقية، سوريا.

مقدمة:

تعتبر فكرة نشر دالة ما في متسلسلة قوى من أهم الأفكار التي نهضت بعلم الرياضيات في مختلف فروعه ومجالاته، ومن أشهر متسلسلات القوى التي تم استخدامها هي متسلسلات تايلور ومتسلسلات لورنت.

استخدمت متسلسلات تايلور لنشر أي دالة f تحليلية في القرص المفتوح $D_R: |z - z_0| < R$ بمتسلسلة قوى وفق:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

حيث a_j هي أمثال متسلسلة تايلور للدالة f وتعطى بالعلاقة:

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi \,, \qquad j = 0,1,2, \dots \dots$$

و γ هو منحني بسيط ومغلق واقع داخل القرص D_R وموجه بالاتجاه الموجب.

درس G.Faber عام 1903 تعميم متسلسلات تايلور وذلك باستبدال القرص المفتوح D_R بمنطقة U محدودة وبسيطة الترابط في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ومحاطة بمنحني نظامي Γ ، وتوصل إلى أن أي دالة f تحليلية في المنطقة U يمكن نشرها بمتسلسلة من الشكل:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j F_j(z) \,, \qquad\qquad z \in U$$

حيث $F_j(z)$ كثيرات حدود فابير و a_j أمثال متسلسلة فابير.

استخدمت متسلسلات فابير في تقريب الدوال العقدية في مختلف الفضاءات الدالية، كما تم تقدير الباقي النوني لهذه المتسلسلات في تلك الفضاءات، وقد نشرت العديد من المقالات العلمية حول ذلك نذكر فيما يأتي أهم الدراسات التي تناولت هذا الموضوع.

توصل Israfilov وآخرون عام 2005 [1] إلى تقدير الباقي النوني في فضاءات سميرنوف–أورليتش، كما تمكن Oktay عام 2019 [2] من تحسين التقدير الذي توصل إليه Israfilov. كما دُرس التقارب الأعظمي لمتسلسلة فابير من أجل الدوال التحليلية من فضاءات سميرنوف ذي الأس المتغير من قِبل Gursel وآخرون عام 2018 [3]. درس A.Kinj عام 2023 [4] خواص التقارب الأعظمي للمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير من أجل الدوال التحليلية في المنطقة بسيطة الترابط U من فضاء موري–سميرنوف الكلاسيكي. كما تم تقدير الباقي النوني لمتسلسلة فابير في فضاءات موري–سميرنوف ذي الأس المتغير من قبل Oktay عام 2024 [5].

من المعلوم أن أي دالة f تحليلية في الحلقة الدائرية $A_{r_1,r_2}: r_1 < |z - z_0| < r_2 \;,\; 0 \le r_1 < r_2 \le \infty$ تقبل النشر في متسلسلة لورنت وفق الآتي:

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j + \sum_{j=1}^{+\infty} a_{-j} (z - z_0)^{-j} \qquad (1)$$

حيث a_j هي أمثال متسلسلة لورنت للدالة f وتحسب بالعلاقة:

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi \,, \qquad j = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \dots .$$

حيث γ هو منحني مغلق حول z_0 موجه بالاتجاه الموجب ويقع داخل الحلقة A_{r_1,r_2}.

سميت المتسلسلة (1) بمتسلسلة لورنت نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي بيير ألفونس لورنت الذي عرفها لأول مرة عام 1843.

بشكل مشابه لتعميم متسلسلات تايلور بمتسلسلات فابير من أجل منطقة بسيطة الترابط كيفية، تم تعميم متسلسلات لورنت بمتسلسلات فابير–لورنت من أجل منطقة ثنائية الترابط كيفية وذلك باستبدال الحلقة الدائرية A_{r_1,r_2} بمنطقة ثنائية الترابط G في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ بحيث تكتب أي دالة f تحليلية في المنطقة G ثنائية الترابط ومحاطة بمنحنيين أملسين وفق:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j F_j(z) + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{b}_j \tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right) \ , \ \ z \in G \qquad (2)$$

حيث a_j و $\tilde{b}_j$ هي أمثال متسلسلة فابير_لورنت للدالة f.

دُرس التقارب الأعظمي لمتسلسلات فابير_لورنت في فضاءات سميرنوف بأس متغير من قبل *Israfilov* وآخرون عام 2020 [6].

في هذا البحث قمنا بدراسة التقارب الأعظمي لمتسلسلات فابير_لورنت (2) في فضاءات موري_سميرنوف.

نظمنا بحثنا بحيث: ذكرنا بدايةً بأهم المصطلحات والرموز المستخدمة والتعاريف الأساسية، ثم تطرقنا إلى بعض التمهيديات التي استخدمناها للوصول إلى النتائج المرجوة، ليتم بعد ذلك الوصول إلى برهان النتيجة الأساسية في هذا العمل بكل سهولة ويسر. ونشير إلى أن الثوابت المستخدمة في هذا البحث .. $c, c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$ كلها موجبة ومختلفة ولا تتعلق ب n.

أهمية البحث وأهدافه:

تلعب متسلسلات فابير_لورنت دوراً أساسياً في حل العديد من المسائل الرياضية التي تتم في المناطق ثنائية الترابط وبشكل خاص، في نظرية تقريب الدوال العقدية، ونظرية التحويلات المحافظة، ونظرية القيم الحدودية. لذا تنبع أهمية البحث من دراسة خواص متسلسلات فابير–لورنت وتقاربها في فضاءات موري–سميرنوف. أما أهداف البحث فيمكن تلخيصها، بدراسة التقارب الأعظمي لمتسلسلة فابير–لورنت في فضاءات موري– سميرنوف، وتقدير الباقي النوني لمتسلسلة فابير–لورنت من أجل الدوال التحليلية من فضاءات موري– سميرنوف بدلالة التقريب الأفضل ثم بدلالة معامل الملوسة المعرف في فضاءات موري–سميرنوف.

طرائق البحث وموادّه:

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكلٍ خاص ضمن التحليل العقدي، ونظرية تقريب الدوال العقدية لذلك فالطرائق المتبعة تعتمد بشكلٍ أساسي على مفاهيم التحليل العقدي، مثل التحويلات المحافظة وكثيرات حدود فابير ومتسلسلات فابير وبعض أدبيات نظرية تقريب الدوال العقدية.

بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث:

لتكن G منطقة ثنائية الترابط في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ومحاطة بمنحنيي جوردان محدودي الطول Γ و Γ' ، نضع $K = G \cup \Gamma \cup \Gamma'$. ولنفترض متممة K تتألف من منطقتين بسيطتي الترابط Y و U حيث Y محدودة و U غير

محدودة، وسنفترض دون المساس بالعمومية أن $0 \in Y$ ولنرمز
$D := \{w \in \mathbb{C}\,;\ |w| < 1\}$ و $D^{-} := \{w \in \mathbb{C}\,;\ |w| > 1\}$ و $\gamma_0 := \partial D := \{w \in \mathbb{C}\,;\ |w| = 1\}$
بحسب نظرية ريمان الأساسية في التحويلات المحافظة يوجد تحويل محافظ وحيد φ_1 ينقل المنطقة بسيطة الترابط U إلى D^{-} خارج قرص الواحدة ويحقق الشرطين الآتيين:

$$\varphi_1(\infty) = \infty \qquad and \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi_1(z)}{z} > 0$$

كما يوجد تحويل محافظ وحيد φ_2 ينقل المنطقة بسيطة الترابط والمحدودة Y إلى D^{-} خارج قرص الواحدة ويحقق الشرطين الآتيين:

$$\varphi_2(0) = \infty \qquad and \qquad \lim_{z\to 0} z\varphi_2(z) > 0$$

من أجل $R_1 > 1$ و $R_2 > 1$ نعرف المنحنيات Γ'_{R_1} و Γ_{R_2} وفق
$\Gamma'_{R_1} := \{z \in U\,;\ |\varphi_1(z)| = R_1 > 1\}$ و $\Gamma_{R_2} := \{z \in Y\,;\ |\varphi_2(z)| = R_2 > 1\}$، ولنرمز ب
$U_{R_1} = int\Gamma'_{R_1}$ للمنطقة الواقعة داخل منحني السوية Γ'_{R_1} و $U^{-}_{R_1} := ext\Gamma'_{R_1}$ للمنطقة الواقعة خارج Γ'_{R_1}
$Y_{R_2} := int\Gamma_{R_2}$ للمنطقة الواقعة داخل منحني السوية Γ_{R_2} و $Y^{-}_{R_2} := ext\Gamma_{R_2}$ للمنطقة الواقعة خارج Γ_{R_2}
ولتكن K_{R_1,R_2} منطقة ثنائية الترابط ومحاطة بالمنحنيين Γ'_{R_1} و Γ_{R_2}.

تعاريف ومفاهيم أساسية

<u>تعريف 1</u> [7]: **فضاء دوال ليبيغ.**

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي $\mathbb{C}$، وليكن p عدداً حقيقياً يحقق $1 \le p < \infty$. يُعرف فضاء دوال ليبيغ $L^p(\Gamma)$ بأنه مجموعة جميع الدوال العقدية $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ القيوسة على المنحني Γ والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\int_{\Gamma} |f(z)|^p\, |dz| < \infty.$$

إنَّ فضاء دوال ليبيغ $L^p(\Gamma)$ يشكل فضاء باناخ إذا عرف عليه النظيم الآتي:

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p\, |dz|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

<u>تعريف 2</u> [8]: **فضاء دوال سميرنوف في منطقة ثنائية الترابط.**

لتكن K_{R_1,R_2} منطقة ثنائية الترابط في المستوي العقدي $\mathbb{C}$، ولنأخذ Γ_α صورة أسرة الدوائر $\gamma_\alpha = \{w \in \mathbb{C} : |w| = \alpha\ ,\ 0 < \alpha < 1\}$ وفق تحويل محافظ ينقل قرص الواحدة D إلى المنطقة K_{R_1,R_2}.
يُرمز بـ $E^1(K_{R_1,R_2})$ لأسرة جميع الدوال $f : K_{R_1,R_2} \to \mathbb{C}$ التحليلية في المنطقة K_{R_1,R_2}، والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\sup_{0<\alpha<1} \int_{\gamma_\alpha} |f(z)|\,|dz| < \infty.$$

يُعرف فضاء دوال سميرنوف $E^p(K_{R_1,R_2})$ حيث $1 \le p < \infty$ بالعلاقة:

$$E^p(K_{R_1,R_2}) = \{f \in E^1(K_{R_1,R_2}) :\ f \in L^p(\Gamma'_{R_1} \cup \Gamma_{R_2})\}.$$

<u>تعريف 3</u> [7]: فضاء دوال موري.

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول و $1 \le p < \infty$ و $0 \le \lambda \le 1$. يُعرف فضاء دوال موري $L^{p,\lambda}(\Gamma)$ بأنه أسرة جميع الدوال $f:\Gamma \to \mathbb{C}$ القيوسة على المنحني Γ والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Gamma)} = \left\{\sup_{B} \frac{1}{|B \cap \Gamma|^{1-\lambda}} \int_{B\cap\Gamma} |f(z)|^p |dz|\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

حيث sup مأخوذ على كل الأقراص B التي مراكزها نقاط من المنحني Γ وأنصاف أقطارها r حيث $r > 0$، كما يرمز $|B \cap \Gamma|$ لقياس ليبيغ للمجموعة $B \cap \Gamma$، وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها المنحني Γ هو دائرة الواحدة γ_0، فإنَّ فضاء دوال موري $L^{p,\lambda}(\gamma_0)$ يعرف بأنه أسرة الدوال $f:\gamma_0 \to \mathbb{C}$ القيوسة على γ_0 والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\gamma_0)} = \left\{\sup_{I} \frac{1}{|I|^{1-\lambda}} \int_{I} \left|f\left(e^{it}\right)\right|^p |dt|\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

حيث sup مأخوذ على كل المجالات الجزئية I من المجال $[0,2\pi]$، ويرمز $|I|$ لطول المجال I.

حالات خاصة من فضاء دوال موري:

عندما $\lambda = 1$ فإن فضاء دوال موري $L^{p,1}(\Gamma)$ يؤول إلى فضاء دوال ليبيغ $L^p(\Gamma)$.

عندما $\lambda = 0$ فإن فضاء دوال موري $L^{p,0}(\Gamma)$ يؤول إلى الفضاء $L^\infty(\Gamma)$.

ومن الجدير بالذكر أنه اذا كان $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le 1$ فإن $L^{p,\lambda_1}(\Gamma) \subseteq L^{p,\lambda_2}(\Gamma)$. الأمر الذي يعني أن $L^{p,\lambda}(\Gamma) \subseteq L^1(\Gamma)$ مهما يكن $0 \le \lambda \le 1$.

يُعدّ فضاء موري واحداً من أهم الفضاءات الدَّالية الشهيرة، وقد عرفه الباحث الأمريكي C. B. Morrey عام 1938 [9] أثناء دراسته لحمل المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية من المرتبة الثانية. في الآونة الاخيرة حُلت العديد من المسائل الرياضية في فضاءات موري، نذكر على سبيل المثال [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

سنحتاج إلى متراجحة هولدر في فضاءات موري.

مبرهنة مساعدة (1) [17, p.8]: ليكن $1 \le p < \infty$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و $0 < \lambda \le 1$. إذا كان $f \in L^{p,\lambda}(\Gamma)$ و $g \in L^{q,\lambda}(\Gamma)$ عندئذٍ يوجد ثابت موجب c بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\|fg\|_{L^1(\Gamma)} \le c\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Gamma)} \|g\|_{L^{q,\lambda}(\Gamma)} \qquad (3)$$

<u>تعريف 4</u> [15]: فضاء دوال موري–سميرنوف في منطقة ثنائية الترابط.

لتكن K_{R_1,R_2} منطقة ثنائية الترابط في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ومحاطة بمنحنيي جوردان محدودي الطول Γ'_{R_1} و Γ_{R_2}، وليكن $1 \le p < \infty$ و $0 \le \lambda \le 1$. يعرف فضاء موري–سميرنوف $E^{p,\lambda}\left(K_{R_1,R_2}\right)$ بالعلاقة الآتية:

$$E^{p,\lambda}\left(K_{R_1,R_2}\right) = \left\{f \in E^1\left(K_{R_1,R_2}\right) : f \in L^{p,\lambda}\left(\Gamma'_{R_1} \cup \Gamma_{R_2}\right)\right\}.$$

تعريف 5 [18]: **التقريب الأفضل.**

لتكن M منطقة بسيطة الترابط من المستوي العقدي $\mathbb{C}$، وليكن Γ منحني جوردان يحيط بالمنطقة M، وليكن $f \in E^{p,\lambda}(M)$ حيث $1 \le p < \infty$ و $0 \le \lambda \le 1$، ويفرض أن $p_n^* \in \mathcal{P}_n$ كثير الحدود الأفضل تقريب للدالة f. يُرمز $E_n(f,M)_{p,\lambda}$ للخطأ الأصغري لتقريب الدالة f من الدرجة n على الأكثر ويعرف وفق:

$$E_n(f,M)_{p,\lambda} = \inf_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|_{L^{p,\lambda}(\Gamma)} = \|f - p_n^*\|_{L^{p,\lambda}(\Gamma)}. \qquad (4)\#$$

حيث inf مأخوذ على $\mathcal{P}_n$ أسرة كل كثيرات الحدود من الدرجة n على الأكثر.

لنرمز ب

$$E_n\left(f, U_{R_1}\right)_{p,\lambda} = \inf_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|_{L^{p,\lambda}\left(\Gamma'_{R_1}\right)} \quad , \quad f \in E^{p,\lambda}\left(U_{R_1}\right) \qquad (5)$$

$$E_n\left(f, Y_{R_2}^-\right)_{p,\lambda} = \inf_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_{L^{p,\lambda}\left(\Gamma_{R_2}\right)} \quad , \quad f \in E^{p,\lambda}\left(Y_{R_2}^-\right) \qquad (6)$$

حيث inf مأخوذ على كثيرات الحدود $p_n(z)$ و $q_n\left(\frac{1}{z}\right)$ على الترتيب.

تعريف 6 [19]: **المنحني ديني– أملس.**

لتكن h دالة مستمرة على المجال $[0,2\pi]$، معامل استمراريتها يعطى بالعلاقة:

$$\omega(t,h) = \sup_{\substack{|x-y| \le t \\ x,y \in [0,2\pi]}} |h(x) - h(y)|, \qquad t \ge 0$$

يقال عن الدالة h إنها ديني–مستمرة **(Dini-continuous)** إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega(t,h)}{t} dt < \infty.$$

ويقال عن المنحنيΓ إنه منحني ديني–أملس إذا كان له التمثيل $\Gamma: \varphi_0(\zeta),\ 0 \le \zeta \le 2\pi$ ، وكانت الدالة $\varphi_0'(\zeta)$ ديني– مستمرة وتحقق الشرط $\varphi_0'(\zeta) \ne 0$.

وهذا يعني أنه اذا كان $R_1, R_2 > 1$ وكان منحنيي السوية Γ'_{R_1} و Γ_{R_2} التحليليين. فإنه بحسب [6] توجد الثوابت الموجبة $c_i > 0\ ,\ i = 1,2,\dots,8$ بحيث:

$$0 < c_1 \le |\varphi_1'(z)| \le c_2 < \infty\ ;\ z \in \Gamma'_{R_1} \ ،$$

$$0 < c_3 \le |\phi_1'(w)| \le c_4 < \infty\ ;\ |w| = R_1 \qquad (7)$$

$$0 < c_5 \le |\varphi_2'(z)| \le c_6 < \infty\ ;\ z \in \Gamma_{R_2} \ ،$$

$$0 < c_7 \le |\phi_2'(w)| \le c_8 < \infty\ ;\ |w| = R_2 \qquad (8)$$

تعريف 7 [18]: **معامل الملوسة في فضاء دوال موري.**

ليكن $f, f_1, f_2 \in L^{p,\lambda}(\gamma_0)$. يُعرف معامل الملوسة من المرتبة r حيث $r = 1,2,\dots$ للدالة f في فضاء موري $L^{p,\lambda}(\gamma_0)$ بالعلاقة:

$$\Omega_{p,\lambda}^r(f,t) = \sup_{|h| \le t} \|\Delta_h^r(f,.)\|_{L^{p,\lambda}(\gamma_0)} \quad , \qquad t \ge 0$$

حيث :

$$\Delta_h^r(f,x)=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}f(x+jh)$$

إن معامل الملوسة يحقق الخواص الآتية:

$$\lim_{t\to 0}\Omega_{p,\lambda}^r(f,t)=0$$
$$\Omega_{p,\lambda}^r(f_1+f_2,t)\le\Omega_{p,\lambda}^r(f_1,t)+\Omega_{p,\lambda}^r(f_2,t)$$
$$\Omega_{p,\lambda}^r(f,nt)\le n^r\Omega_{p,\lambda}^r(f,t)\quad,\qquad n\in\mathbb{N}$$
$$\Omega_{p,\lambda}^r(f,\alpha t)\le(\alpha+1)^r\Omega_{p,\lambda}^r(f,t)\quad,\qquad \alpha>0$$

النتائج والمناقشة:

لتكن $f\in E^1\left(K_{R_1,R_2}\right)$ دالة تحليلية في المنطقة ثنائية الترابط K_{R_1,R_2}، عندئذٍ فإن الدالة f يمكن تمثيلها تكاملياً وفق صيغة كوشي التكاملية للمناطق ثنائية الترابط بالصيغة الآتية:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R_2}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\quad,\qquad z\in K\qquad(9)$$

لنضع

$$f^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\qquad(10)$$

$$f^-(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R_2}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\qquad(11)$$

وبالتالي

$$f(z)=f^+(z)+f^-(z)\,,\qquad z\in K\qquad(12)$$

ليكن منشور لورنت للدالة φ_1 في جوار اللانهاية

$$\varphi_1(z)=\alpha z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\ \ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\alpha_j}{z^j}+\ \ldots\ldots.\qquad,\qquad z\in U$$

من أجل n عدد صحيح غير سالب فإن الدالة $\left(\varphi_1(z)\right)^n$ تكتب وفق:

$$\left(\varphi_1(z)\right)^n=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{-j}}{z^j}\qquad(13)$$

نسمي القسم النظامي لمنشور الدالة $\left(\varphi_1(z)\right)^n$ في جوار ∞ بكثيرة حدود فابير $F_n(z)$ من أجل المنطقة U. ليكن $E_n(z)=-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{-j}}{z^j}$ عندئذٍ

$$F_n(z)=\left(\varphi_1(z)\right)^n+E_n(z)\quad,\ z\in U\qquad(14)$$

نرمز ب ϕ_1 للتحويل العكسي للدالة φ_1. تعرف كثيرات حدود فابير F_n وفق [18] بالعلاقة:

$$\frac{\phi'_1(t)}{\phi_1(t)-z}=\sum_{j=0}^{\infty}F_j(z)\frac{1}{t^{j+1}} \quad , \quad 1<R_1<|t| \quad , \quad z\in U_{R_1} \tag{15}$$

من العلاقة (10)، بإجراء التحويل $\zeta=\phi_1(w)$، وبالتالي $d\zeta=\phi'_1(w)dw$ ومنه

$$f^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R_1}\frac{\phi'_1(w)}{\phi_1(w)-z}f\left(\phi_1(w)\right)dw \tag{16}$$

ومن العلاقتين (15) و (16)، يمكننا أن نكتب منشور للدالة f^+ وفق الآتي:

$$f^+(z)\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_j(f^+)\,F_j(z), \qquad z\in U_{R_1} \tag{17}$$

حيث

$$a_j(f^+)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R_1}\frac{f^+\left(\phi_1(w)\right)}{w^{j+1}}dw \tag{18}$$

وبالتالي يمكننا تعريف الباقي النوني لمنشور الدالة f^+ بالصيغة الآتية:

$$R_n^+=f^+(z)-\sum_{j=0}^{n}a_j(f^+)F_j(z)=\sum_{j=n+1}^{\infty}a_j(f^+)F_j(z), \tag{19}$$

ومن جهة ثانية، ليكن منشور لورنت للدالة φ_2 في جوار الصفر

$$\varphi_2(z)=\frac{\eta}{z}+\eta_0+\eta_1 z+\eta_2 z^2+\ \dots\dots\dots+\eta_j z^j+\ \dots\dots \qquad , \qquad z\in Y$$

من أجل n عدد صحيح غير سالب، فإن الدالة $\left(\varphi_2(z)\right)^n$ تكتب وفق:

$$\left(\varphi_2(z)\right)^n=\sum_{j=0}^{n}\frac{\nu_j}{z^j}+\sum_{j=1}^{\infty}\nu_{-j}z^j \qquad z\in Y \tag{20}$$

ليكن $\tilde{E}_n(z)=-\sum_{j=1}^{\infty}\nu_{-j}z^j$ وبالتالي

$$\tilde{F}_n\left(\frac{1}{z}\right)=\left(\varphi_2(z)\right)^n+\tilde{E}_n(z)\,, \tag{21}$$

حيث $\tilde{F}_n$ كثيرة حدود بقوى $\frac{1}{z}$ ، ولنرمز ب ϕ_2 للتحويل العكسي للدالة φ_2.

تعرف كثيرات الحدود $\tilde{F}_n$ وفق [18] بالعلاقة:

$$\frac{\phi'_2(t)}{\phi_2(t)-z}=-\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{t^{j+1}} \quad , \quad 1<R_2<|t| \quad , \quad z\in Y_{R_2}^- \tag{22}$$

من العلاقة (11)، بإجراء التحويل $\zeta=\phi_2(w)$، وبالتالي $d\zeta=\phi'_2(w)dw$ ومنه

$$f^-(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R_2}\frac{\phi'_2(w)}{\phi_2(w)-z}f\left(\phi_2(w)\right)dw \tag{23}$$

ومن العلاقتين (22) و (23)، يمكننا أن نكتب منشور للدالة f^- وفق الآتي:

$$f^-(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_j(f^-)\,\tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right), \qquad z \in Y_{R_2}^- \tag{24}$$

حيث

$$\tilde{b}_j(f^-) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R_2} \frac{f^-\left(\phi_2(w)\right)}{w^{j+1}}dw \tag{25}$$

وبالتالي يمكننا تعريف الباقي النوني لمنشور الدالة f^- بالصيغة الآتية:

$$R_n^- = f^-(z) - \sum_{j=0}^{n} \tilde{b}_j(f^-)\tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \tilde{b}_j(f^-)\tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right), \tag{26}$$

وبالتالي فإن الباقي النوني لمتسلسلة فابير–لورنت في فضاءات موري–سميرنوف للدالة f التحليلية في المنطقة ثنائية الترابط K_{R_1,R_2} يعرف وفق:

$$R_n(z,f) = f(z) - \left(\sum_{j=0}^{n} a_j(f^+)F_j(z) + \sum_{j=0}^{n} \tilde{b}_j(f^-)\tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right)\right) \tag{27}$$

ومن العلاقة (12)

$$R_n(z,f) = f^+(z) + f^-(z) - \left(\sum_{j=0}^{n} a_j(f^+)F_j(z) + \sum_{j=0}^{n} \tilde{b}_j(f^-)\tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right)\right) \tag{28}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} &R_n(z,f) = R_n^+ + R_n^- \\ \Longrightarrow\quad &|R_n(z,f)| \le |R_n^+| + |R_n^-| \quad , \quad \forall z \in K \end{aligned} \tag{29}$$

وهذا يعني أنه لتقدير الباقي النوني $R_n(z,f)$، يكفي أن نقوم بتقدير R_n^+ و R_n^-.

سنعرض بعض المبرهنات المساعدة اللازمة لاتمام البرهان. من [20, pp. 63] لدينا

$$E_{j,k}\left(\phi_k(w)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r_k} \tau^j F_k(\tau,w)d\tau\ , \quad |w| \ge r_k > 1 \quad , \ k = 1,2 \tag{30}$$

$$F_k(\tau,w) = \frac{\phi_k'(\tau)}{\phi_k(\tau)-\phi_k(w)} - \frac{1}{\tau - w} \ , \quad |\tau| > 1 \ , \ |w| > 1 \tag{31}$$

وسنحتاج إلى تقدير ليبديف

مبرهنة مساعدة (2) [20, pp. 174]: اذا كان $r_k > 1$ و $|w| \ge r_k > 1$ حيث $k = 1,2$، عندئذٍ فإن المتراجحة الآتية محققة:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=r_k} \left|\frac{\phi_k'(t)}{\phi_k(t)-\phi_k(w)} - \frac{1}{t-w}\right| |dt| \le \sqrt{\frac{r_k^2}{r_k^4-1}\,ln\left(\frac{r_k^2}{r_k^2-1}\right)}\,. \tag{32}$$

سنقوم بتقدير الباقي النوني R_n^+ وفق المبرهنة الآتية:

مبرهنة(1): ليكن $z \in \Gamma'_{r_1}$ حيث $1 < r_1 < R_1$، ولتكن $p_n^* \in \mathcal{P}_n$ كثير الحدود الأفضل تقريب للدالة $f^+ \in E^{p,\lambda}\left(U_{R_1}\right)$. عندئذٍ فإن المتراجحة الآتية محققة:

$$|R_n^+| \le \frac{c_6 E_n\left(f^+, U_{R_1}\right)_{p,\lambda}}{R_1^{n+1}(R_1 - 1)} \sqrt{n\ln(n)}\,. \qquad (33)$$

البرهان: من (19) و (18) و (14)

$$|R_n^+| = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j(f^+)F_j(z)\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_1}\frac{f^+\left(\phi_1(t)\right)}{t^{j+1}}dt\right\}F_j(z)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_1} f^+\left(\phi_1(t)\right)\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{F_j(z)}{t^{j+1}}\right)dt\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_1}\{f^+(\phi_1(t)) - p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{F_j(z)}{t^{j+1}}\right)dt\right|$$

$$\le \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_1}\left\{f^+\left(\phi_1(t)\right) - p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\right\}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{w^j}{t^{j+1}}dt\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_1}\left\{f^+\left(\phi_1(t)\right) - p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\right\}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{E_{j,1}(\phi_1(w))}{t^{j+1}}dt\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_1}\left|f^+\left(\phi_1(t)\right) - p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{w^j}{t^{j+1}}\right||dt|$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_1}\left|f^+\left(\phi_1(t)\right) - p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{E_{j,1}(\phi_1(w))}{t^{j+1}}\right||dt|$$

لنضع

$$l_1^+ = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_1}\left|f^+\left(\phi_1(t)\right) - p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{w^j}{t^{j+1}}\right||dt|$$

$$l_2^+ = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_1}\left|f^+\left(\phi_1(t)\right) - p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{E_{j,1}(\phi_1(w))}{t^{j+1}}\right||dt|$$

فيكون

$$|R_n^+| \le l_1^+ + l_2^+$$

سنقوم بتقدير l_1^+ و l_2^+

تقدير l_1^+

$$l_1^+ = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_1}\left|f^+\left(\phi_1(t)\right) - p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{w^j}{t^{j+1}}\right||dt|$$

بإجراء التحويل $\zeta=\phi_1(t)$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'_{R_1}}|f^+(\zeta)-p_n^*(\zeta)|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{(\varphi_1(z))^j}{(\varphi_1(\zeta))^{j+1}}\right||\varphi_1'(w)||dt|$$

ومن (7) و (3)

$$\leq\frac{c_1}{2\pi}\|f^+(\zeta)-p_n^*(\zeta)\|_{L^{p,\lambda}\left(\Gamma'_{R_1}\right)}\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi_1(z)\right)^j}{\left(\varphi_1(\zeta)\right)^{j+1}}\right\|_{L^{q,\lambda}\left(\Gamma'_{R_1}\right)}$$

$$\leq\frac{c_1}{2\pi}\|f^+(\zeta)-p_n^*(\zeta)\|_{L^{p,\lambda}\left(\Gamma'_{R_1}\right)}\left\|\frac{|\varphi_1(z)|^{n+1}}{|\varphi_1(\zeta)|^{n+1}(|\varphi_1(\zeta)|-|\varphi_1(z)|)}\right\|_{L^{q,\lambda}\left(\Gamma'_{R_1}\right)}$$

$$=\frac{c_1}{2\pi}E_n\left(f^+,U_{R_1}\right)_{p,\lambda}\left\|\frac{r_1^{n+1}}{R_1^{n+1}(R_1-r_1)}\right\|_{L^{q,\lambda}\left(\Gamma'_{R_1}\right)}$$

$$\Rightarrow\quad l_1^+\leq\frac{c_1r_1^{n+1}}{2\pi R_1^{n+1}(R_1-r_1)}E_n\left(f^+,U_{R_1}\right)_{p,\lambda}.$$

والآن سنقوم بتقدير l_2^+

$$l_2^+=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_1}\left|f^+\left(\phi_1(t)\right)-p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{E_{j,1}(\phi_1(w))}{t^{j+1}}\right||dt|$$

ومن (30)

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_1}\left\{\left|f^+\left(\phi_1(t)\right)-p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r_1}\tau^jF_1(\tau,w)d\tau\right)\frac{1}{t^{j+1}}\right|\right\}|dt|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_1}\left\{\left|f^+\left(\phi_1(t)\right)-p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\right|\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=r_1}\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\tau^j}{t^{j+1}}\right||F_1(\tau,w)||d\tau|\right\}|dt|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_1}\left\{\left|f^+\left(\phi_1(t)\right)-p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\right|\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=r_1}\left|\frac{\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||F_1(\tau,w)||d\tau|\right\}|dt|$$

$$\leq\frac{r_1^{n+1}}{2\pi R_1^{n+1}}\int_{|\tau|=r_1}\left\{|F_1(\tau,w)|\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_1}\left|f^+\left(\phi_1(t)\right)-p_n^*\left(\phi_1(t)\right)\right|\frac{|dt|}{|t-\tau|}\right\}|d\tau|$$

بتغيير المتحول $t=\varphi_1(\zeta)$ ومنه $\phi_1(t)=\zeta$، وبالتالي $dt=\varphi'_1(\zeta)d\zeta$

$$\leq\frac{r_1^{n+1}}{2\pi R_1^{n+1}}\int_{|\tau|=r_1}\left\{|F_1(\tau,w)|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'_{R_1}}|f^+(\zeta)-p_n^*(\zeta)|\frac{|\varphi_1{}'(\zeta)||d\zeta|}{|\varphi_1(\zeta)-\varphi_1(z)|}\right\}|d\tau|$$

وبحسب (3)

$$\leq\frac{c_2r_1^{n+1}}{4\pi^2R_1^{n+1}}\int_{|\tau|=r_1}|F_1(\tau,w)|\left\{\left\|f^+(\zeta)-p_n^*(\zeta)\right\|_{L^{p,\lambda}(\Gamma'_{R_1})}\left\|\frac{\varphi_1'(\zeta)}{\varphi_1(\zeta)-\varphi_1(z)}\right\|_{L^{q,\lambda}(\Gamma'_{R_1})}\right\}|d\tau|$$

$$\leq \frac{c_3 r_1^{n+1}}{R_1^{n+1}(R_1-r_1)}\int_{|\tau|=r_1}|F_1(\tau,w)|E_n\left(f^+,U_{R_1}\right)_{p,\lambda}|d\tau|$$

وبالاستفادة من(31) و (32)

$$\leq \frac{c_3 r_1^{n+1}}{R_1^{n+1}(R_1-r_1)}\int_{|\tau|=r_1}\left|\frac{\phi_1{}'(\tau)}{\phi_1(\tau)-\phi_1(w)}-\frac{1}{\tau-w}\right|E_n\left(f^+,U_{R_1}\right)_{p,\lambda}|d\tau|$$

$$\leq \frac{c_4 r_1^{n+1}}{R_1^{n+1}(R_1-r_1)}E_n\left(f^+,U_{R_1}\right)_{p,\lambda}\sqrt{\frac{r_1^2}{r_1^4-1}ln\left(\frac{r_1^2}{r_1^2-1}\right)}$$

وبالتالي أصبحت لدينا المتراجحة

$$|R_n^+|\leq l_1^+ + l_2^+.$$

$$\Longrightarrow\ |R_n^+|\leq \frac{c_5 r_1^{n+1}}{R_1^{n+1}(R_1-r_1)}E_n\left(f^+,U_{R_1}\right)_{p,\lambda}\sqrt{\frac{r_1^2}{r_1^4-1}ln\left(\frac{r_1^2}{r_1^2-1}\right)}$$

بوضع $z\in K$ و $r_1=1+\frac{1}{n}$

$$|R_n^+|\leq \frac{c_6 E_n\left(f^+,U_{R_1}\right)_{p,\lambda}}{R_1^{n+1}(R_1-1)}\sqrt{n\ln(n)}\,.$$

والآن سنقوم بتقدير الباقي النوني R_n^- وفق المبرهنة الآتية:

مبرهنة(2): ليكن $z\in\Gamma_{r_2}$ حيث $1<r_2<R_2$، ولتكن $q_n\left(\frac{1}{z}\right)\in\mathcal{P}_n$ كثيرة الحدود الأفضل تقريب للدالة $f^-\in E^{p,\lambda}\left(Y_{R_2}^-\right)$. عندئذٍ فإن المتراجحة الآتية محققة:

$$|R_n^-|\leq \frac{c_{12}E_n\left(f^-,Y_{R_2}^-\right)_{p,\lambda}}{R_2^{n+1}(R_2-1)}\sqrt{n\ln(n)}\,. \qquad (34)$$

البرهان: من (25) و (24) و (21)

$$|R_n^-|=\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\tilde{b}_j(f^-)\tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right)\right|=\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_2}\frac{f^-\left(\phi_2(t)\right)}{t^{j+1}}dt\right\}\tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_2}f^-\left(\phi_2(t)\right)\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right)}{t^{j+1}}\right)dt\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_2}\left\{f^-(\phi_2(t))-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right\}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\tilde{F}_j\left(\frac{1}{z}\right)}{t^{j+1}}\right)dt\right|$$

$$\leq\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_2}\left\{f^-\left(\phi_2(t)\right)-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right\}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{w^j}{t^{j+1}}dt\right|$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_2}\left\{f^-\left(\phi_2(t)\right)-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right\}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{E_{j,2}(\phi_2(w))}{t^{j+1}}dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_2}\left|f^-\big(\phi_2(t)\big)-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{w^j}{t^{j+1}}\right||dt|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_2}\left|f^-\big(\phi_2(t)\big)-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{E_{j,2}(\phi_2(w))}{t^{j+1}}\right||dt|$$

لنضع

$$l_1^- = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_2}\left|f^-\big(\phi_2(t)\big)-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{w^j}{t^{j+1}}\right||dt|$$

$$l_2^- = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_2}\left|f^-\big(\phi_2(t)\big)-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{E_{j,2}(\phi_2(w))}{t^{j+1}}\right||dt|$$

فيكون

$$|R_n^-| \leq l_1^- + l_2^-$$

سنقوم بتقدير المتراجحتين l_1^- و l_2^-

تقدير l_1^-

$$l_1^- = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_2}\left|f^-\big(\phi_2(t)\big)-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{w^j}{t^{j+1}}\right||dt|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{R_2}}|f^-(\zeta)-q_n(\zeta)|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{(\varphi_2(z))^j}{(\varphi_2(\zeta))^{j+1}}\right||dt|$$

بحسب(3)

$$\leq \frac{c_7}{2\pi}\|f^-(\zeta)-q_n(\zeta)\|_{L^{p,\lambda}(\Gamma_{R_2})}\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\big(\varphi_2(z)\big)^j}{\big(\varphi_2(\zeta)\big)^{j+1}}\right\|_{L^{q,\lambda}(\Gamma_{R_2})}$$

$$\leq \frac{c_7}{2\pi}\|f^-(\zeta)-q_n(\zeta)\|_{L^{p,\lambda}(\Gamma_{R_2})}\left\|\frac{|\varphi_2(z)|^{n+1}}{|\varphi_2(\zeta)|^{n+1}(|\varphi_2(\zeta)|-|\varphi_2(z)|)}\right\|_{L^{q,\lambda}(\Gamma_{R_2})}$$

$$=\frac{c_7}{2\pi}E_n\big(f^-,Y_{R_2}^-\big)_{p,\lambda}\left\|\frac{r_2^{n+1}}{R_2^{n+1}(R_2-r_2)}\right\|_{L^{q,\lambda}(\Gamma_{R_2})}$$

$$\Rightarrow \quad l_1^- \leq \frac{c_7 r_2^{n+1}}{2\pi R_2^{n+1}(R_2-r_2)}E_n\big(f^-,Y_{R_2}^-\big)_{p,\lambda}.$$

والآن تقدير l_2^-

$$l_2^- = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_2}\left|f^-\big(\phi_2(t)\big)-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{E_{j,2}(\phi_2(w))}{t^{j+1}}\right||dt|$$

ومن(30)

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_2}\left\{\left|f^{-}(\phi_2(t))-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r_2}\tau^j F_2(\tau,w)d\tau\right)\frac{1}{t^{j+1}}\right|\right\}|dt|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_2}\left\{\left|f^{-}(\phi_2(t))-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right|\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=r_2}\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\tau^j}{t^{j+1}}\right||F_2(\tau,w)||d\tau|\right\}|dt|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_2}\left\{\left|f^{-}(\phi_2(t))-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right|\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=r_2}\left|\frac{\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||F_2(\tau,w)||d\tau|\right\}|dt|$$

$$\leq\frac{r_2^{n+1}}{2\pi R_2^{n+1}}\int_{|\tau|=r_2}\left\{|F_2(\tau,w)|\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R_2}\left|f^{-}(\phi_2(t))-q_n\left(\frac{1}{\phi_2(t)}\right)\right|\frac{|dt|}{|t-\tau|}\right\}|d\tau|$$

بتغيير المتحول $t=\varphi_2(\zeta)$ ومنه $\phi_2(t)=\zeta$، وبالتالي $dt=\varphi'_2(\zeta)d\zeta$

$$\leq\frac{r_2^{n+1}}{2\pi R_2^{n+1}}\int_{|\tau|=r_2}\left\{|F_2(\tau,w)|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{R_2}}\left|f^{-}(\zeta)-q_n\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|\frac{|\varphi_2'(\zeta)||d\zeta|}{|\varphi_2(\zeta)-\varphi_2(z)|}\right\}|d\tau|$$

وبالإستفادة من(3)

$$\leq\frac{c_8 r_2^{n+1}}{4\pi^2 R_2^{n+1}}\int_{|\tau|=r_2}|F_2(\tau,w)|\left\{\left\|f^{-}(\zeta)-q_n(\zeta)\right\|_{L^{p,\lambda}(\Gamma_{R_2})}\left\|\frac{\varphi_2'(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)-\varphi_2(z)}\right\|_{L^{q,\lambda}(\Gamma_{R_2})}\right\}|d\tau|$$

$$\leq\frac{c_9 r_2^{n+1}}{R_2^{n+1}(R_2-r_2)}\int_{|\tau|=r_2}|F_2(\tau,w)|E_n\left(f^{-},Y_{R_2}^{-}\right)_{p,\lambda}|d\tau|$$

وبحسب(31)

$$\leq\frac{c_9 r_2^{n+1}}{R_2^{n+1}(R_2-r_2)}\int_{|\tau|=r_2}\left|\frac{\phi_2'(\tau)}{\phi_2(\tau)-\phi_2(w)}-\frac{1}{\tau-w}\right|E_n\left(f^{-},Y_{R_2}^{-}\right)_{p,\lambda}|d\tau|$$

$$\leq\frac{c_{10} r_2^{n+1}}{R_2^{n+1}(R_2-r_2)}E_n\left(f^{-},Y_{R_2}^{-}\right)_{p,\lambda}\sqrt{\frac{r_2^2}{r_2^4-1}ln\left(\frac{r_2^2}{r_2^2-1}\right)}$$

وبالتالي أصبحت لدينا المتراجحة

$$|R_n^{-}|\leq l_1^{-}+l_2^{-}.$$

$$\leq\frac{c_{11} r_2^{n+1}}{R_2^{n+1}(R_2-r_2)}E_n\left(f^{-},Y_{R_2}^{-}\right)_{p,\lambda}\sqrt{\frac{r_2^2}{r_2^4-1}ln\left(\frac{r_2^2}{r_2^2-1}\right)}$$

بوضع $z\in K$ و $r_2=1+\frac{1}{n}$

$$|R_n^{-}|\leq\frac{c_{12}E_n\left(f^{-},Y_{R_2}^{-}\right)_{p,\lambda}}{R_2^{n+1}(R_2-1)}\sqrt{n\ln(n)}\,.$$

والآن نختم بحثنا بالنتيجة الأساسية الآتية، والتي تختص بتقدير الباقي النوني لمتسلسلات فابير–لورنت في فضاءات ثنائية الترابط.

نتيجة(1): ليكن $f\in E^{p,\lambda}\left(K_{R_1,R_2}\right)$ حيث $1<p<\infty$ و $0<\lambda\leq 1$ و $R_1,R_2>1$. عندئذٍ يُقدر الباقي النوني لمتسلسلة فابير–لورنت بالمتراجحة الآتية:

$$|R_n(z,f)| \le c\sqrt{nln(n)}\left(\frac{E\left(f^+,U_{R_1}\right)_{p,\lambda}}{R_1^{n+1}(R_1-1)}+\frac{E\left(f^-,Y_{R_2}^-\right)_{p,\lambda}}{R_2^{n+1}(R_2-1)}\right),\quad \forall z\in K. \qquad (35)$$

البرهان

من العلاقة (29)

$$|R_n(z,f)| \le |R_n^+| + |R_n^-| \quad , \quad \forall z\in K$$

ومن المبرهنتين (1) و (2) نجد

$$\le \frac{c_6E_n\left(f^+,U_{R_1}\right)_{p,\lambda}}{R_1^{n+1}(R_1-1)}\sqrt{n\ln(n)}+\frac{c_{12}E_n\left(f^-,Y_{R_2}^-\right)_{p,\lambda}}{R_2^{n+1}(R_2-1)}\sqrt{n\,ln(n)}$$

ومنه

$$|R_n(z,f)| \le c\sqrt{n\ln(n)}\left(\frac{E_n\left(f^+,U_{R_1}\right)_{p,\lambda}}{R_1^{n+1}(R_1-1)}+\frac{E_n\left(f^-,Y_{R_2}^-\right)_{p,\lambda}}{R_2^{n+1}(R_2-1)}\right).$$

نتيجة(2): ليكن $f\in E^{p,\lambda}\left(K_{R_1,R_2}\right)$ حيث $1<p<\infty$ و $0<\lambda\le 1$ و $R_1,R_2>1$. عندئذٍ يُقدر الباقي النوني لمتسلسلة فابير–لورنت بالمتراجحة الآتية:

$$|R_n(z,f)| \le c^*\sqrt{nln(n)}\left(\frac{\Omega_{p,\lambda}^r\left(f_0^+,\frac{1}{n+1}\right)_{\gamma_0}}{R_1^{n+1}(R_1-1)}+\frac{\Omega_{p,\lambda}^r\left(f_0^-,\frac{1}{n+1}\right)_{\gamma_0}}{R_2^{n+1}(R_2-1)}\right).$$

حيث $f_0^+(w)=(\phi_1(R_1w))$ و $f_0^-(w)=(\phi_2(R_2w))$.

البرهان: من العلاقة(35)

$$|R_n(z,f)| \le c\sqrt{n\ln(n)}\left(\frac{E_n\left(f^+,U_{R_1}\right)_{p,\lambda}}{R_1^{n+1}(R_1-1)}+\frac{E_n\left(f^-,Y_{R_2}^-\right)_{p,\lambda}}{R_2^{n+1}(R_2-1)}\right)$$

وبالاستفادة من [14]، نجد

$$E_n\left(f^+,U_{R_1}\right)_{p,\lambda}=\inf_{p_n\in\mathcal{P}_n}\|f^+-p_n\|_{L^{p,\lambda}\left(\Gamma'_{R_1}\right)}\le\|f^+-p_n\|_{L^{p,\lambda}\left(\Gamma'_{R_1}\right)}$$
$$\le\ c_{13}\Omega_{p,\lambda}^r\left(f_0^+,\frac{1}{n+1}\right)_{\gamma_0} \qquad (36)$$
$$E_n\left(f^-,Y_{R_2}^-\right)_{p,\lambda}=\inf_{q_n\in\mathcal{P}_n}\|f^--q_n\|_{L^{p,\lambda}(\Gamma_{R_2})}\le\|f^--q_n\|_{L^{p,\lambda}(\Gamma_{R_2})}$$
$$\le\ c_{14}\Omega_{p,\lambda}^r\left(f_0^-,\frac{1}{n+1}\right)_{\gamma_0} \qquad (37)$$

وبتعويض العلاقتين (36) و (37) في العلاقة (35)، نتوصل إلى

$$|R_n(z,f)| \le c_{15}\sqrt{nln(n)}\left(\frac{\Omega_{p,\lambda}^r\left(f_0^+,\frac{1}{n+1}\right)_{\gamma_0}}{R_1^{n+1}(R_1-1)}+\frac{\Omega_{p,\lambda}^r\left(f_0^-,\frac{1}{n+1}\right)_{\gamma_0}}{R_2^{n+1}(R_2-1)}\right).$$

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذه المقالة إلى تقدير الباقي النوني لمتسلسلة فابير–لورنت في فضاءات موري–سميرنوف من أجل الدوال التحليلية في منطقة ثنائية الترابط ومحاطة بمنحنيين أملسين بدلالة التقريب الأفضل، ثم بدلالة معامل الملوسة في فضاءات موري. ونوصي بإتمام العمل بتقدير الباقي النوني لمتسلسلة فابير–لورنت في فضاءات موري–سميرنوف ذات الأس المتغير من أجل الدوال التحليلية في منطقة ثنائية الترابط ومحاطة بمنحنيين أملسين.

References:

[1] D. Israfilov, B. Oktay, R. Akgun. "Approximation in Smirnov–Orlicz classes", *Glasnik Matematicki*, vol. 40, no. 60, pp. 87-102, 2005.
[2] B. Oktay. "Maximal convergence of Faber series in Smirnov- Orlicz classes", *Journal of Mathematical Analysis*, vol. 10, no. 6, pp. 23-31, 2019.
[3] DM. Israfilov, E. Gursel, E. Aydin, "Maximal Convergence of Faber Series in Smirnov Classes with Variable Exponent", *Bulletin of Brazilian Mathematical Society*, vol. 49, no. 9, pp. 955-963, 2018.
[4] A. Kinj, "Maximal convergence of faber series in Morrey-Smirnov Spaces", *Lattakia Univercity Journal*(in Arabic), vol. 43, no. 3, 25-36, 2023.
[5] B. Oktay. "Maximal Convergence by Faber Series in Morrey-Smirnov Classes With Variable Exponents", *Contemporary Mathematics*, vol. 6, no. 1, pp. 1361-1379, 2025.
[6] D. Isrsfilzade, E. Gursel, "Faber-laurent series in variable Smirnov classes", *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 44, no. 2, pp. 389-402, 2020.
[7] A. Kufner, O. John, L. Fucik, S. Pick, *Functions Spaces*, Leyden, The Netherland, Walter de Gruyter GmbH, Berlin\Boston, 2013.
[8] S. Jafarov. "On approximation of functions by p-Faber – Laurent rational functions", *Complex Var. and Elliptic Equat*, vol. 60, no. 3, pp. 416 – 428, 2015.
[9] D. Adams, "Morrey Spaces", *Birkhauser*, Springer International Publishing Switzerland, 144, 2015.
[10] A. Almeida, S. Samko. "Appropximation in generalized Morrey spaces", *Georgian Math*, vol. 25, no. 2, pp. 155-168, 2018.
[11] A. Almeida, S. Samko. "Approximation in Morrey spaces", *Journal of Functional analysis*, vol. 272, no, pp. 2392-2411, 2017.
[12] S. Jafarov, "Direct and converse theorems of the theory of approximation in Morrey spaces", *Proceedings of IAM*, vol. 9, no. 1, pp. 83-94, 2020.
[13] S. Jafarov, "Derivatives of trigonometric polynomials and converse theorem of the constructive theory of functions in Morrey spaces", *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*, vol. 5, no. 1, pp. 137-145, 2019.
[14] D. Israfilov, N. Tozman, "Approximation by polynomials in morrey-smirnov classes", *East J. Approx*, vol. 14, no. 3, pp. 255-269, 2008.
[15] A. Kinj, M. Ali, S. Mahmoud. "Approximation by rational functions in Morrey-Smirnov classes", *Kuwait J. Sci*, vol. 45, no. 2, pp. 1-7, 2018.
[16] A. Kinj, M. Ali, S. Mahmoud. "Approximation of Complex Functions from Morrey space on Dini smooth Curves", * Lattakia University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series*, vol. 38, no. 4, pp. 61-73, 2016.

[17] B. Bilalov,T. Gasymov, A. Gulyeva. "On the solvability of the Riemann boundary value problem in Morrey- Hardy classes", *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 40, no. 5, pp. 1085-1101, 2016.
[18] R. Devore, G. Lorentz. *Constructive Approximation*, Springer Berlin, Heidelberg, 1993.
[19] C. Pommerenke, *Boundary behavior of conformal maps*, 1st edition, Verlage: Springer, 1992.
[20] PK. Suetin, *Series of Faber Polynomials*, Amsterdam: Cordon and Breach Publishers, 1998.