Numerical solution of some fractional integro-differential equations using Bernstein and Laguerre approximations

Dr. Suliman M Mahmoud*
Dr. Sameer H Ehssan **
Mohammed H Ismaiel***

(Received 26 / 9 / 2024. Accepted 5 / 5 /2025)

□ ABSTRACT □

In this paper, we present a numerical solution of some fractional order integro-differential equations involving the Caputo fractional derivative. The numerical method is based on the use of the Riemann-Liouville fractional integral and the approximation of the unknown solution function by Bernstein and Laguerre polynomials. By using regular collection points, the problem was transformed into a system of linear algebraic equations. The proposed method was tested by solving three problems, where numerical comparisons with other methods indicate the significance of the results in terms of numerical accuracy and ease of application. Furthermore, these results show that the Bernstein approximation is better than the Laguerre approximation. The programming language Mathematica was used to process the numerical results and graphs corresponding to the numerical solution and the resulting errors and show the accuracy of the method.

Keywords: Fractional integro-differential equations, Caputo fractional derivative, Riemann-Liouville Fractional Integral, Bernstein polynomial , Laguerre polynomials.

Copyright **:**Latakia University journal-Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

* **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Latakia University, Latakia, Syria. E-mail: Suliman.mahmoud@tishreen.edu.sy**
** **Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Latakia University, Latakia, Syria.**
*** **postgraduate student (Master), Department of Mathematics, Faculty of Science, Latakia University, Latakia, Syria.**

حل عددي لبعض المعادلات التفاضلية–التكاملية الكسرية باستخدام تقريبات برنشتاين و لاغير

د. سليمان محمود*

د. سمير احسان**

محمد اسماعيل ***

(تاريخ الإيداع 26 / 9 / 2024. قُبِل للنشر في 5 / 5 /2025)

ملخّص

نقدم في هذا العمل حل عددي لبعض المعادلات التفاضلية–التكاملية ذات المشتق الكسري وفق مفهوم مشتق كابوتو الكسري. تعتمد الطريقة العددية على استخدام تكامل ريمان–ليوفيل الكسري وتقريب دالة الحل المجهولة وفق كثيرات حدود برنشتاين و لاغير. وباستخدام نقاط تجميع منتظمة تحولت المسألة إلى جملة من المعادلات الجبرية الخطية. تم اختبار الطريقة المقترحة بحل ثلاث مسائل، حيث تشير المقارنات العددية مع طرائق أخرى إلى أهمية النتائج من حيث الدقة العددية وسهولة التطبيق. علاوة على ذلك أظهرت هذه النتائج أنَّ تقريب برنشتاين أفضل من تقريب لاغير. تم استخدام لغة البرمجة Mathematica لمعالجة النتائج العددية والرسوم البيانية الموافقة للحل العددي والأخطاء الناتجة عنه وإظهار دقة الطريقة.

الكلمات المفتاحية: المعادلة التفاضلية–التكاملية الكسرية، مشتق كابوتو الكسري، تكامل ريمان–ليوفيل الكسري، كثيرات حدود برنشتاين، كثيرات حدود لاغير.

حقوق النشر : مجلة جامعة اللاذقية– سورية، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب الترخيص CC BY–NC–SA 04

* أستاذ – قسم الرياضَيات – كليَة العلوم – جامعة اللاذقية – اللّاذقية – سورية.

** أستاذ مساعد– قسم الرياضيَات– كليَة العلوم – جامعة اللاذقية– اللّاذقية – سورية.

*** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضَيات – كليَة العلوم– جامعة اللاذقية– اللّاذقية – سورية.

مقدمة:

يعد حساب التفاضل والتكامل الكسري موضوعاً قديماً وحديثاً، حيث ظهر مفهوم الاشتقاق من مرتبة اختيارية قبل أكثر من 300 عام، حين أرسل الباحث L'Hopital رسالة إلى Leibniz عام 1695 يسأله عن ملاحظة تخص بحثه المتعلق بحساب المشتق من المرتبة n وكان السؤال: في $n = 1/2$ ماذا يحدث إذا كان $d^n f/dx^n$؟. جذب هذا السؤال اهتمام العديد من علماء الرياضيات المعروفين ومنهم: Abel، Fourier، Laplac،Euler، Liouville ، Riemann،Grunwald، Letnikov وغيرهم الكثير، إذ أن حساب التفاضل والتكامل الكسري هو تعميم لحساب التفاضل والتكامل الكلاسيكي[1,2].

إحدى القضايا المثيرة للاهتمام فيما يتعلق بحساب التفاضل والتكامل الكسري هي المعادلة التفاضلية–التكاملية الكسرية، والتي يمكن استخدامها لمحاكاة العديد من المسائل في مختلف العلوم والهندسة بما في ذلك الهندسة الطبية الحيوية وقوانين التخميد وهندسة الزلازل وحركة الموائع، ونماذج المرور وانتقال الأصوات، والحد من انتشار الفيروسات[5-3]. نظرًا لصعوبة إيجاد الحل للمعادلات التفاضلية-التكاملية الكسرية تحليليًا، كرسَّ الباحثون الكثير من الجهد والاهتمام للبحث عن تقنيات عددية مختلفة لحلها.

قدم الباحث Heydari واخرون عام 2013 طريقة عددية تعتمد على مويجات ليجندر ودوال القطع النبضية لحل معادلة فولتيرا التفاضلية–التكاملية اللاخطية الكسرية، حيث تم تقريب الحدود التفاضلية والتكاملية وتحويل المعادلة إلى جملة معادلات جبرية بحلها حصلوا على الحل التقريبي[6]. استخدم Amer واخرون عام 2018 تحويل سامودو مع الإضراب الهوموتوبي لإيجاد الحل العددي لبعض المعادلات التفاضلية–التكاملية الكسرية، حيث تم تطبيق تحليل ادوميان للحدود غير الخطية[7] . ثم قام Shi واخرون في العام 2021 بإيجاد الحل العددي لصنف من المعادلات التفاضلية–التكاملية الكسرية وذلك باستخدام كثيرات حدود ليجندر المعدلة، حيث تم تقريب الحد التفاضلي الكسري، وكذلك تقريب الحد التكاملي من خلال حساب المصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري الموافقة لكثيرات حدود ليجندر، وبذلك تم تحويل المعادلة إلى جملة معادلات غير خطية بحلها حصلوا على الحل التقريبي [8]. استخدم Oyedepo وآخرون عام 2021 طريقة الإضراب الهوموتوبي مع كثيرات حدود برنشتاين لحل معادلة فولتيرا التفاضلية–التكاملية الكسرية[9]. قدم Talaei واخرون عام 2022 طريقة عددية تعتمد على كثيرات حدود تشيبتشيف لحل معادلة فريدهولم التفاضلية–التكاملية الكسرية، من خلال حساب مصفوفة العمليات للتكامل الكسري الموافقة لهذا التقريب[10]. استخدم Oyedepo وآخرون عام 2022 طريقة المربعات الصغرى مع كثيرات حدود برنشتاين لحل معادلة فولتيرا التفاضلية–التكاملية الكسرية[11]. تمكن Rahrovi واخرون عام 2023 من حل نموذج كسري للنمو السكاني باستخدام تقريب جاكوبي المعدل ومصفوفة العمليات للتكامل الكسري الموافقة لهذا التقريب، إذ تم تحويل النموذج إلى نظام من المعادلات اللاخطية، بحله تم الحصول الحل التقريبي[12]. قام AL-Ghafri وآخرون عام 2023 بإيجاد الحل العددي لمعادلة فولتيرا–فريدهولم التفاضلية–التكاملية الكسرية، حيث تم نشر الدالة المجهولة وفق سلسلة لانهائية مع تطبيق تحليل ادوميان على الدوال المجهولة اللاخطية، تم الحصول بشكل تكراري على الحل التقريبي[13]. حلّ Rawashdeh واخرون عام 2023 معادلة فريدهولم التفاضلية–التكاملية اللاخطية الكسرية، وذلك باستخدام التحويل الطبيعي ومن ثمّ نشر الدالة المجهولة وفق سلسلة لانهائية ونشر الدالة المجهولة اللاخطية تحت إشارة التكامل وفق كثيرات حدود ادوميان، بالمطابقة تم الحصول على الحل التقريبي[14]. ثم قام Goud وآخرون في العام 2023 بإيجاد

الحل التقريبي لنظام من معادلات فريدهولم التفاضلية–التكاملية الكسرية الخطية وذلك باستخدام طريقة المربعات الصغرى مع كثيرات حدود لاغير[15].

وفي عملنا هذا نقوم بإيجاد الحل العددي لمعادلة فولتيرا-فريدهولم التفاضلية-التكاملية ذات المشتق الكسري(FIDEs) الآتية:

$$D^{\alpha}u(x)+p(x)\,u(x)=g(x)+\lambda_1\int_0^1 k_1(x,t)\,u(t)\,dt+\lambda_2\int_0^x k_2(x,t)\,u(t)\,dt\ ;0\le x,t\le 1\ ,\ \alpha>0 \qquad (1)$$

$$u^{i}(0)=u_0^{(i)}\ ,\ i=0,1,\dots,[\alpha]-1 \qquad (2)$$

حيث $D^{\alpha}u(x)$ تشير إلى مشتق كابوتو الكسري من المرتبة α للدالة $u(x)$ و $g(x)$ ، $p(x)$ هي دوال مستمرة معطاة، $k_1(x,t)$ و $k_2(x,t)$ هما دوال مستمرة معطاة وتسمى نواة المعادلة التكاملية، λ_1،λ_2 ثوابت لها دلالة فيزيائية، x,t هي متحولات حقيقية في المجال[0,1] ، $u(x)$ هي دالة الحل المجهولة التي يطلب تحديدها.

أهميَة البحث وأهدافـه:

يهدف هذا العمل إلى إيجاد الحل العددي لمعادلات فولتيرا–فريدهولم التفاضلية–التكاملية ذات المشتق الكسري باستخدام طريقة تجميعية معتمداً على تقريبات برنشتاين و لاغير، هذه المعادلات تعد في غاية الأهمية بالنسبة للباحثين وذلك نظراً لأهميتها الخاصة بين أفرع العلوم، إذ أنّها تمثل نماذج رياضية للكثير من الظواهر المختلفة حيث نشاهدها في الفيزياء والكيمياء والهندسة، تم اختبار فعالية الطريقة بمقارنتها مع طرائق أخرى مأخوذة من مراجع حديثة.

طرائق البحث وموادّه:

يندرج هذا البحث تحت فرع الرياضيات التطبيقية وعلوم الحاسوب في مجال التحليل العددي الذي يقدم خوارزميات وبرامج لحل الكثير من المسائل التي لا يمكن حلّها بالطرق التحليلية، يعتمد البحث طريقة عددية لحل بعض المسائل في المعادلات التفاضلية–التكاملية الكسرية، تعتمد طرائق البحث أيضاً على منظومات الجبر الخطي وعلوم البرمجة والخوارزميات حيث تحتاج لاستخدام لغة برمجة عالية المستوى لمعالجة النتائج العددية وتوضيحها بالرسومات البيانية الموافقة لها مثل Mathematica و Maple ...

تعاريف ومفاهيم أساسية:

تعريف(1): تكامل ريمان – ليوفيل الكسري (Riemann–Liouville Fractional Integral):[8]

لتكن u دالة حقيقية معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ و $x>0$ و $\alpha\ge 0$ ، عندئذ يعطى تكامل ريمان–ليوفيل للدالة u من المرتبة α بالعلاقة :

$$I^{\alpha}u(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1}u(\tau)\,d\tau\ ;\ x>0 \qquad (3)$$

حيث $\Gamma(\alpha)$ هي دالة غاما المألوفة: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx$ ، $I^0\, u(x) = u(x)$

تعريف(2): مشتق كابوتو الكسري (Caputo Fractional Derivative): [8]

لتكن u دالة حقيقية معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ و $x > 0$ و $\alpha \geq 0$ ، عندئذ يعطى مشتق كابوتو للدالة uمن المرتبة α بالعلاقة :

$$D^\alpha\, u(x) = \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_0^x \frac{u^r(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-r+1}}\, d\tau \quad ; 0 \leq r-1 \leq \alpha \leq r \tag{4}$$

بعض الخصائص [3,4] :

- $I^\alpha D^\alpha u(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} u^{(k)}(0^+)\frac{x^k}{k!} \quad ; x > 0.$
- $I^\alpha x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\, x^{k+\alpha} \quad for\ k \in \mathbb{N}_0.$
- $D^\alpha I^\alpha u(x) = u(x).$
- $D^\alpha C = 0\,; \quad C\ is\ constant.$
- $D^\alpha x^\beta = \begin{cases} 0 & ; \beta \epsilon \mathbb{N}_0,\ \beta < \lceil\alpha\rceil. \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\, x^{\beta-\alpha} & ;\ \beta \epsilon \mathbb{N}_0\ and\ \beta \geq \lceil\alpha\rceil. \end{cases}$

حيث: $\lceil\alpha\rceil$ تشير إلى أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي α و $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$.

تعريف(3): Bernstein polynomial [11]:

تُعرَّف كثيرة حدود برنشتاين $B_{i,n}(x)$من الدرجة n على المجال $x \in [0,1]$ بالشكل الاتي:

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \ , \ i = 0,1,2,\dots,n. \tag{5}$$

يمكن إنشاء دالة $\bar{u}_n(x)$ كتركيب خطي من كثيرات حدود برنشتاين، على النحو الاتي:

$$\bar{u}_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i\, B_{i,n}(x) = C^T \Phi(x). \tag{6}$$

حبث

$$C^T = [c_0, c_1, \dots, c_n] \quad ; \quad c_i \in \mathbb{R}\ , i = 0,1,\dots,n.$$
$$\Phi(x) = [B_{0,n}(x), B_{1,n}(x), \dots, B_{n,n}(x)]^T.$$

تعريف(4): Laguerre polynomials [16]:

تُعرَّف كثيرة حدود لاغير $L_n(x)$من الدرجة n بالشكل الاتي:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) \quad ; \quad x \geq 0\,. \tag{7}$$

يمكن إنشاء دالة $\bar{u}_n(x)$ كتركيب خطي من كثيرات حدود لاغير، على النحو الاتي:

$$\bar{u}_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i\, L_i(x) = A^T\, \Psi(x). \tag{8}$$

حيث

$$A^T = [a_0, a_1, \dots, a_n] \quad ; \quad a_i \in \mathbb{R}\ , i = 0,1,\dots,n.$$
$$\Psi(x) = [L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)]^T.$$

الطريقة العددية المقترحة:

نقوم في البداية بتطبيق تكامل ريمان-ليوفيل الكسري على طرفي المعادلة (1)، فنحصل على:

$$u(x) - \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} u^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + I^{\alpha}\left[p(x)\,u(x)\right] = I^{\alpha}\left[g(x) + \lambda_1 \int_0^1 k_1(x,t)\,u(t)\,dt + \lambda_2 \int_0^x k_2(x,t)\,u(t)\,dt\right] \quad (9)$$

بتعويض العلاقة(6) بدلاً عن الحل الدقيق في المعادلة (9) نحصل على:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\,B_{i,n}(x) - \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} u^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + I^{\alpha}\left[p(x)\,\sum_{i=0}^{n} c_i\,B_{i,n}(x)\right] = I^{\alpha}\Big[\,g(x) + \lambda_1 \int_0^1 k_1(x,t)\sum_{i=0}^{n} c_i\,B_{i,n}(t)\;dt + \lambda_2 \int_0^x k_2(x,t)\;\sum_{i=0}^{n} c_i\,B_{i,n}(t)\;dt\,\Big] \quad (10)$$

والتي يمكن إعادة كتابتها بالشكل:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\,B_{i,n}(x) + I^{\alpha}\left[\sum_{i=0}^{n} c_i\,\psi_{1,i}(x) - \sum_{i=0}^{n} c_i\,\psi_{2,i}(x) - \sum_{i=0}^{n} c_i\,\psi_{3,i}(x)\right] = \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} u^{(k)}(0) + I^{\alpha}[g(x)]$$

حيث:

$$\psi_{1,i}(x) = p(x)\,B_{i,n}(x) \quad , \quad \psi_{2,i}(x) = \lambda_1 \int_0^1 k_1(x,t)\,B_{i,n}(t)\,dt \quad , \quad \psi_{3,i}(x) = \lambda_2 \int_0^x k_2(x,t)\,B_{i,n}(t)\,dt$$

ومنه:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\,\left[B_{i,n}(x) + I^{\alpha}\left[\psi_{1,i}(x) - \psi_{2,i}(x) - \psi_{3,i}(x)\right]\right] = \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} u^{(k)}(0) + I^{\alpha}[g(x)] \quad (11)$$

نأخذ نقاط التجزئة المنتظمة $\{\; x_j = jh \;;\; j = 1,2,\dots,n+1\;\}$ للمجال [0,1] حيث $h = \frac{1}{n}$، بمثابة نقاط تجميع، وبتعويض x_j بدلاً عن كل xفي المعادلة(11) نحصل على جملة المعادلات:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\;\beta_{i,j} = \xi_j \quad , \; j = 1,2,\dots,n+1 \quad (12)$$

حيث:

$$\beta_{i,j} = B_{i,n}(x_j) + I^{\alpha}\left[\psi_{1,i}(x_j) - \psi_{2,i}(x_j) - \psi_{3,i}(x_j)\right]$$

$$\xi_j = \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} u^{(k)}(0) + I^{\alpha}\left[g(x_j)\right]$$

تتألف منظومة المعادلات (12) من $(n+1)$ معادلة جبرية في المجاهيل $c_i\;(i = 0,1,\dots,n)$ ، بحلّه نحصل على قيم هذه المجاهيل، نعوضها بالعلاقة (6) فنحصل على الحل التقريبي للمسألة (1)-(2).

تحليل التقارب:

لدراسة التقارب نقدم المبرهنات الآتية:

مبرهنة1:(Error Estimate)

بفرض أنَّ $u \in C^{(n+1)}[0,1]$ و $Y = Span\{B_{0,n}, B_{1,n}, B_{2,n}, \dots, B_{n,n}\}$ و $\bar{u}_n = C^T\Phi(x)$ تركيب خطي من كثيرات حدود برنشتاين، إذا كان $\bar{u}_n$ أفضل تقريب للدالة u فيY، فإنَّ:

$$\|u(x)-\bar{u}_n(x)\|_2 \le \frac{\eta}{(n+1)!\ 2^{2n+1}} \qquad (13)$$

حيث η ثابت ، $\left|u^{(n+1)}(x)\right| \le \eta$.

البرهان:

بفرض أنَّ $q_n(x)$ هي كثيرة حدود استيفاء للدالة $u(x)$ عند النقاط x_r حيث $(x_r\ , r=0,1,\dots,n)$ هي جذور كثيرات حدود تشيبتشيف المزاحة من الدرجة $(n+1)$ في المجال $[0,1]$، عندئذ:

$$u(x)-q_n(x)=\frac{u^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{r=0}^{n}(x-x_r)\ \ ,\xi \in [0,1]. \qquad (14)$$

لدينا من (المرجع[17] ، المبرهنة(2.5)):

$$|u(x)-q_n(x)| \le \frac{\eta}{(n+1)!\ 2^{2n+1}}\ \ ,\forall x \in [0,1]. \qquad (15)$$

و بما أنَّ $\bar{u}_n$ أفضل تقريب للدالة u في Y ، فإنَّ:

$$\|u(x)-\bar{u}_n(x)\|_2^2 \le \|u(x)-q_n(x)\|_2^2 = \int_0^1 |u(x)-q_n(x)|^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{\eta}{(n+1)!\ 2^{2n+1}}\right)^2 dx = \left(\frac{\eta}{(n+1)!\ 2^{2n+1}}\right)^2,$$

عندئذ:

$$\|u(x)-\bar{u}_n(x)\|_2 \le \frac{\eta}{(n+1)!\ 2^{2n+1}}.$$

وبذلك يكتمل البرهان.

مبرهنة2:

ليكن $\bar{u}_n(x)$ الحل التقريبي و $u(x)$ الحل الدقيق للمسألة(1)-(2) عندئذ:

$$|r(x)| \le \frac{\varepsilon}{\Gamma(m-\alpha+1)} + (p+|\lambda_1|\,M_1+|\lambda_2|\,M_2)\,\|\delta_n\| \qquad (16)$$

حيث:

$$p=sup_{0\le x\le 1}|p(x)|\ ,\ M_1=sup_{0\le x,t\le 1}|k_1(x,t)|\ ,\ M_2=sup_{0\le x,t\le 1}|k_2(x,t)|$$

$$\|\delta_n\|=sup_{0\le x,t\le 1}|\delta_n(x)| \quad ;\ \delta_n(x)=u(x)-\bar{u}_n(x)\ ,\ r(x): residual\ error.$$

البرهان:

بتعويض الحل التقريبي $\bar{u}_n(x)$ في المعادلة (1) بدلاً عن $u(x)$ نحصل على:

$$D^{\alpha}\bar{u}_n(x)+p(x)\,\bar{u}_n(x)-\lambda_1\int_0^1 k_1(x,t)\,\bar{u}_n(x)\,dt-\lambda_2\int_0^x k_2(x,t)\,\bar{u}_n(x)\,dt = g(x)+r(x) \qquad (17)$$

بطرح المعادلة (17) من المعادلة (1) نحصل على:

$$D^{\alpha}\delta_n(x) + p(x)\delta_n(x) - \lambda_1 \int_0^1 k_1(x,t)\,\delta_n(t)\,dt - \lambda_2 \int_0^x k_2(x,t)\,\delta_n(t)\,dt = -r(x) \qquad (18)$$

عندئذ:

$$|r(x)| \le |D^{\alpha}\delta_n(x)| + p\|\delta_n\| + |\lambda_1|M_1\|\delta_n\| + |\lambda_2|M_2\|\delta_n\| \qquad (19)$$

ولدينا من (المرجع[18] ، المبرهنة6): إذا كانت $u \in C^m[0,1]$ فإنَّ:

$$|D^{\alpha}\delta_n(x)| \le \varepsilon \frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} \quad ; \quad \varepsilon \text{ عدد صغير موجب} \qquad (20)$$

حيث $m-1 \le \alpha \le m$

عندئذ:

$$|r(x)| \le \frac{\varepsilon}{\Gamma(m-\alpha+1)} + (p + |\lambda_1|\,M_1 + |\lambda_2|\,M_2)\,\|\delta_n\|.$$

وبذلك يكتمل البرهان.

النتائج والمناقشة:

نختبر فعالية الطريقة المقترحة بحل ثلاث أمثلة متنوعة محلولة بطرائق أخرى في مراجع مختلفة والمقارنة معها، استخدمنا برنامج *Mathematica* لتنفيذ الخوارزمية للطريقة المقترحة وإظهار النتائج العددية وإيضاحها بالرسوم البيانية الموافقة لها.

المثال (1): لتكن معادلة فولتيرا–فريدهولم التفاضلية–التكاملية الكسرية التالية: [19,20]

$$D^{2.3}u(x) = \frac{\Gamma(4.5)}{\Gamma(2.2)}\,x^{1.2} - \frac{1}{99}\,x^{5.5} - \frac{1}{11}\,x + \frac{1}{4}\int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 xt\,u(t)\,dt \quad , \; 0 \le x \le 1 \qquad (21)$$

مع الحل الدقيق $u(x) = x^{\frac{7}{2}}$ حيث: $u(0) = u`(0) = u``(0) = 0$.

الحل: باستخدام الطريقة العددية المقترحة مع تقريب لاغير:

نطبق تكامل ريمان–ليوفيل على المعادلة(21) فنحصل على المعادلة الآتية :

$$u(x) - \sum_{k=0}^{2} u^k(0)\frac{x^k}{k!} = I^{2.3}\left[\frac{\Gamma(4.5)}{\Gamma(2.2)}\,x^{1.2} - \frac{1}{99}\,x^{5.5} - \frac{1}{11}\,x\right] + I^{2.3}\left[\frac{1}{4}\int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 xt\,u(t)\,dt\right] \qquad (22)$$

نقرب الدالة المجهولة $u(x)$ في المعادلة (22) بكثيرات حدود لاغير من الدرجة $(n=6)$:

$$\bar{u}_6(x) = \sum_{i=0}^{6} a_i\,l_i(x) \qquad (23)$$

و بتعويض $\bar{u}_6(x)$ بدلاً عن $u(x)$ في المعادلة (22) ينتج لدينا:

$$\sum_{i=0}^{6} a_i l_i(x) - I^{2.3}\left[\frac{1}{4}\int_0^x x\sum_{i=0}^{6} a_i l_i(t)\,dt - \frac{1}{4}\int_0^x t\sum_{i=0}^{6} a_i l_i(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 xt\sum_{i=0}^{6} a_i l_i(t)\,dt\right] = I^{2.3}\left[\frac{\Gamma(4.5)}{\Gamma(2.2)}\,x^{1.2} - \frac{1}{99}\,x^{5.5} - \frac{1}{11}\,x\right]$$

ومنه

$$a_0+ a_1(1-x)+\ a_2\ (1-2x+0.5\ x^2)+\ a_3\ (1-3x+1.5\ x^2-(1\div 6)\ x^3)+\ a_4(\frac{1}{24}(24-96x+72x^2-16x^3+x^4))+\ a_5(\frac{1}{120}(120-600x+600x^2-200x^3+25x^4-x^5))+ a_6(\frac{1}{720}(720-4320x+5400x^2-2400x^3+450x^4-36x^5+x^6))$$

$$-\left[3.387884554744551\times 10^{-8}x^{3.3}\left((833308.8618897+193792.75857900002\ x)\ a_0+(277769.62062989996+193792.75857900002\ x-36564.67143000001\ x^2)\ a_1-69442.40515747492\ \ a_2+193792.75857900002\ x\ \ a_2-73129.34286000002\ x^2\ a_2+5803.9160999999995\ x^3\ a_2-263881.1395984049\ \ a_3+193792.75857900002\ \ a_3-109694.01429\ x^2\ a_3+17411.7483\ x^3\ a_3-795.0569999999999\ x^4\ a_3-349526.7726259573\ \ a_4+193792.75857900002\ x\ \ a_4-146258.68572000004\ x^2\ a_4+34823.4966\ x^3\ a_4-3180.2279999999996\ x^4\ a_4+95.79\ x^5\ a_4-360769.8286990723\ a_5+193792.75857900002\ x\ a_5-182823.35715\ x^2\ a_5+58039.16099999998\ x^3\ a_5-7950.570000000001\ x^4\ a_5+478.95\ x^5\ a_5-10.3\ x^6\ a_5-324105.8921665247\ a_6+193792.75857900002\ x\ \ a_6-219388.02858\ x^2\ a_6+87058.74149999999\ x^3\ a_6-15901.140000000001\ x^4\ a_6+1436.8499999999997\ x^5\ a_6-61.80000000000001\ x^6\ a_6+x^7\ a_6\right)\right]=\ 0.857109621959463(1.1667119051981603\ x^{2.2}\ x^{1.2999999999999998}-0.011977482333213564\ x^{3.3}-0.00012880488827572852x^{6.5}x^{1.2999999999999998})$$

نأخذ سبع نقاط تجميع ناتجة عن التجزئة المنتظمة $\{x_i=x_0+i*h\ ;i=1,2,\dots,7\}$ حيث $\{h=0.1\ ,x_0=0\}$:

من أجل النقطة الأولى $(x=x_0=0.1)$ نحصل على المعادلة الأولى :

$$a_0+0.9\ a_1+0.805\ a_2+0.7148333333333334\ a_3+0.6293374999999999\ a_4+0.5483540833333334\ a_5-1.697964487840985\times 10^{-11}(852688.1377476001\ a_0+296783.24977349996\ a_1-50788.6188120749\ a_2-245581.4716408048\ a_3-331575.5771935574\ a_4-343161.5375294724\ a_5-306835.0136601248\ a_6)+0.47172866805555563\ a_6=0.0003110825684311468$$

من أجل النقطة الثانية $(x=x_1=0.2)$ نحصل على المعادلة الثانية :

$$a_0+0.8\ \ a_1+0.62\ a_2+0.4586666666666666\ a_3+0.3147333333333332\ a_4+0.18699733333333335\ a_5-1.672351594610793\times 10^{-10}(872067.4136055\ a_0+315065.58548849996\ a_1-33562.59582727492\ a_2-229372.32655900484\ a_3-316345.0380781573\ a_4-328872.46628847223\ a_5-293451.37763632473\ a_6)+0.07431742222222225\ a_6=0.0035270325411831042$$

من أجل النقطة الثالثة $(x=x_2=0.3)$ نحصل على المعادلة الثالثة :

$$a_0+0.7\ \ a_1+0.445\ a_2+0.23050000000000007\ a_3+0.0523375000000001\ a_4-0.09333275000000002\ a_5-6.374244875782783\times 10^{-10}(891446.6894634\ a_0+332616.62777489994\ a_1-17729.512706474918\ a_2-215152.09606840485\ a_3-303637.5194359573\ a_4-317582.28919907234\ a_5-283487.7536665247\ a_6)-0.21005798750000004\ a_6=0.014595346573856693$$

من أجل النقطة الرابعة $(x=x_3=0.4)$ نحصل على المعادلة الرابعة :

$$a_0+0.6\ a_1+0.27999999999999997\ a_2+0.029333333333333357\ a_3-0.1616000000000001\ a_4-0.30141866666666656\ a_5-1.647125058282831\times 10^{-9}(910825.9653213001\ a_0+349436.3766327\ a_1-3254.5459530749067\ a_2-202821.08002120483\ a_3-293262.7880743573\ a_4-308988.6284402723\ a_5-276511.7211861247\ a_6)-0.3978396444444443\ a_6=0.03997795299852192$$

من أجل النقطة الخامسة $(x=x_4=0.5)$ نحصل على المعادلة الخامسة :

$$a_0 + 0.5\,a_1 + 0.125\,a_2 - 0.14583333333333331\,a_3 - 0.33072916666666663\,a_4 - 0.44557291666666665\,a_5 - 3.439771685211924 \times 10^{-9}(930205.2411792001\,a_0 + 365524.83206189994\,a_1 + 9897.127929525086\,a_2 - 192281.48640640487\,a_3 - 285037.8985039573\,a_4 - 302806.4979470724\,a_5 - 272124.0548345247\,a_6) - 0.5041449652777777\,a_6 = 0.08734552782595552$$

من أجل النقطة السادسة $(x = x_5 = 0.6)$ نحصل على المعادلة السادسة :

$$a_0 + 0.4\,a_1 - 0.019999999999999962\,a_2 - 0.2959999999999999\,a_3 - 0.4585999999999998\,a_4 - 0.5336479999999999\,a_5 - 6.278092774489946 \times 10^{-9}(949584.5170371\,a_0 + 380881.99406249996\,a_1 + 21760.332437925084\,a_2 - 183437.43134980492\,a_3 - 278787.07799055736\,a_4 - 298767.75462647225\,a_5 - 269957.15277912474\,a_6) - 0.5428232000000002\,a_6 = 0.16540843031294122$$

من أجل النقطة السابعة $(x = x_6 = 0.7)$ نحصل على المعادلة السابعة :

$$a_0 + 0.3\,a_1 - 0.15499999999999994\,a_2 - 0.4221666666666667\,a_3 - 0.5486624999999996\,a_4 - 0.573046416666667\,a_5 - 1.044124135847819 \times 10^{-8}(968963.7928950001\,a_0 + 395507.8626344999\,a_1 + 32369.89106872506\,a_2 - 176194.93911400487\,a_3 - 274341.6116071573\,a_4 - 296620.55698947224\,a_5 - 269673.50751932466\,a_6) - 0.5265109319444449\,a_6 = 0.2838036345619834$$

تشكل المعادلات السبعة المذكورة جملة معادلات خطية، بحلها نحصل على قيم المعاملات الآتية:

$$\begin{cases} a_0 = 42.87727308540163\ ,\ a_1 = -246.01260496969667\ ,\ a_2 = 614.3592986727573 \\ a_3 = -852.6832291692599\ ,\ a_4 = 688.8052594700888 \\ a_5 = -304.1966768079986\ ,\ a_6 = 56.8505983796926 \end{cases} \quad (24)$$

نعوض قيم هذه المعاملات في العلاقة (8) فنحصل على الحل التقريبي:

$$\bar{u}_6(x) = -0.00008133901496876206 + 0.0024510134444426512\,x - 0.03331219954338849\,x^2 + 0.40283196250646824\,x^3 + 0.8575354635618666\,x^4 - 0.3075576122513084\,x^5 + 0.07895916441623972\,x^6\ . \quad (25)$$

باستخدام الطريقة العددية المقترحة مع تقريب برنشتاين لأجل $(n = 6)$، نحصل على قيم المعاملات الآتية:

$$\begin{cases} c_0 = -0.00008133900836943748\ ,\ c_1 = 0.000327163207008687, \\ c_2 = -0.0014851477938742663\ ,\ c_3 = 0.01462332584661802\ , \\ c_4 = 0.12596321364956417,\ c_5 = 0.4157545727482782\ ,\ c_6 = 1.0008264532790938 \end{cases} \quad (26)$$

نعوض قيم هذه المعاملات في العلاقة (6) فنحصل على الحل التقريبي:

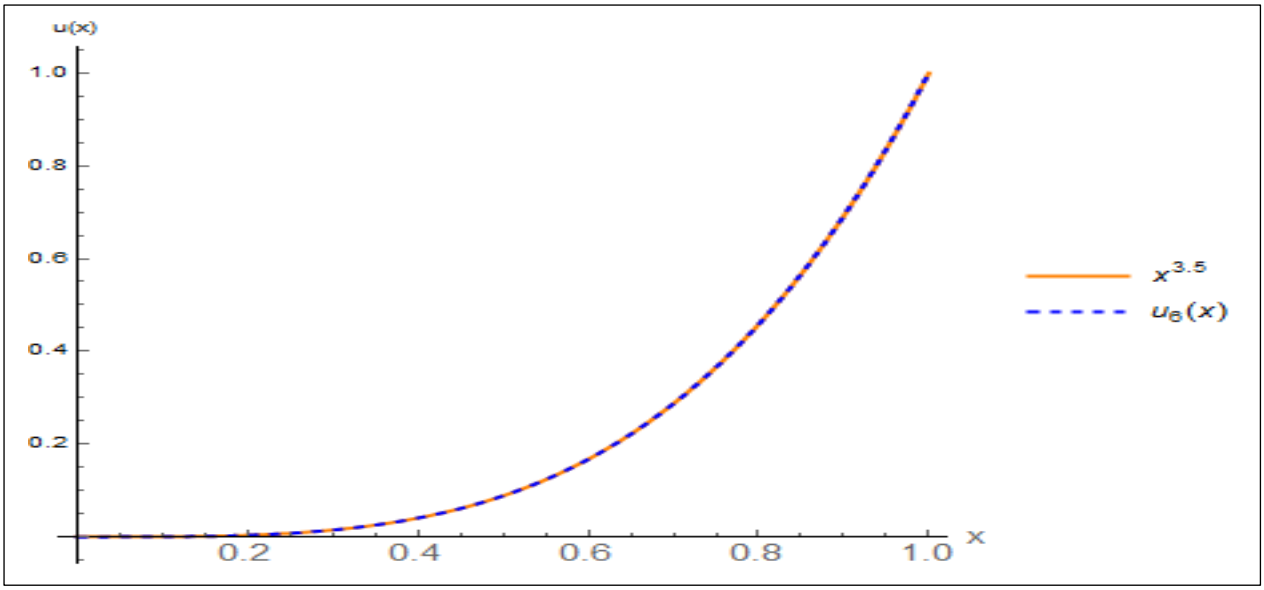
$$\bar{u}_6(x) = -0.00008133900836943748 + 0.0024510132922687467\,x - 0.033312198243916166\,x^2 + 0.40283195715272635\,x^3 + 0.8575354749516346\,x^4 - 0.30755762430724176\,x^5 + 0.07895916944199144\,x^6\ . \quad (27)$$

الجدول(1): مقارنات للحل العددي والخطأ المطلق الناتج عنه بالطريقة المقترحة بإستخدام تقريبات برنشتاين و لاغير

		الطريقة المقترحة مع تقريب لاغير $(n=6)$		الطريقة المقترحة مع تقريب برنشتاين $(n=6)$	
x	الحل الدقيق	الحل العددي	الخطأ المطلق	الحل العددي	الخطأ المطلق
$1/8$	0.000690533966	0.000691590260373687	1.05629 E-6	0.000691590260231279	1.05629 E-6
$2/8$	0.0078125	0.007812327102428185	1.72898 E-7	0.007812327102483668	1.72898 E-7
$3/8$	0.0322930777	0.032293255204667304	1.77541 E-7	0.03229325520442185	1.77541 E-7
$4/8$	0.0883883476	0.0883886411684216	2.93520 E-7	0.08838864116828368	2.93520 E-7
$5/8$	0.193010111	0.19301049444331397	3.83349 E-7	0.19301049444316193	3.83349 E-7
$6/8$	0.365354467	0.36536129508934323	6.82787 E-6	0.3653612950916475	6.82787 E-6
$7/8$	0.626654533	0.6267835893621054	1.29056 E-4	0.6267835893924638	1.29056 E-4

الجدول(2): الأخطاء المطلقة الناتجة عن الحل العددي لطريقة pecahan وآخرون و طريقة Li :

	الخطأ المطلق لطريقة Li [20]				الخطأ المطلق لطريقة pecahan وآخرون [19]		
x	$(n=8)$		$(n=32)$		LWM (m=2,k=5)	(m=6,n=2)	(m=7,n=2)
	GHM	CASW	GHM	CASW			
$1/8$	1.2316 E-4	7.2373 E-3	4.2465 E-6	1.0174 E-4	6.64 E-5	9.89 E-6	6.76 E-6
$2/8$	3.1235 E-4	6.2642 E-3	5.6172 E-5	4.1987 E-4	4.53 E-5	2.47 E-5	1.69 E-5
$3/8$	4.6237 E-4	3.1236 E-3	6.2164 E-5	9.2364 E-4	3.14 E-5	4.21 E-5	2.89 E-5
$4/8$	2.8236 E-3	5.2374 E-2	6.9423 E-5	4.1726 E-3	7.37 E-5	6.15 E-5	4.20 E-5
$5/8$	4.1327 E-3	3.6285 E-2	3.2375 E-4	8.1648 E-3	2.44 E-4	8.16 E-5	5.70 E-5
$6/8$	5.2321 E-3	2.2364 E-2	4.5421 E-4	2.3112 E-2	3.81 E-4	1.03 E-4	7.30 E-5
$7/8$	6.0432 E-3	9.1287 E-1	6.2376 E-4	8.0723 E-2	6.02 E-4	1.25 E-4	9.02 E-5



الشكل(1): الحل بالطريقة المقترحة (باستخدام تقريب برنشتاين لأجل $n=6$) مع الحل الدقيق.

لمثال(2): لتكن معادلة فولتيرا-فريدهولم التفاضلية–التكاملية الكسرية الآتية: [21]

$$D^{0.25}u(x) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.75)}\,x^{1.75} + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.75)}\,x^{2.75} - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3)}{2\,\Gamma(7/2)}\,x^{5/2} - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(4)}{2\,\Gamma(9/2)}\,x^{7/2} - \frac{7x}{36} + \frac{3}{20} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{1/2}}\,dt + \frac{1}{3}\int_0^1 (x-t)\,u(t)\,dt \quad , 0 \le x \le 1 \qquad (28)$$

مع الحل الدقيق: $\{u(x) = x^2 + x^3\}$ حيث: $u(0) = 0$.

الحل: باستخدام الطريقة العددية المقترحة مع تقريب لاغير لأجل $(n = 3)$ نحصل على قيم المعاملات الآتية :

$$\begin{cases} a_0 = 7.999999999998431\,, \;\; a_1 = -21.999999999994895 \\ a_2 = 19.99999999999447\,, \;\; a_3 = -5.999999999997999 \end{cases} \qquad (29)$$

نعوض قيم هذه المعاملات في العلاقة (8) فنحصل على الحل التقريبي:

$$\bar{u}_3(x) = 7.999999999998431 - 21.999999999994895\,(1-x) + 9.999999999997234(2 - 4x + x^2) - 0.9999999999996665\,(6 - 18x + 9x^2 - x^3) \qquad (30)$$

باستخدام الطريقة العددية المقترحة مع تقريب برنشتاين لأجل $(n = 3)$ نحصل على قيم المعاملات الآتية :

$$\begin{cases} c_0 = 3.465426803633579 \times 10^{-16}\,, \;\; c_1 = -5.519883348373985 \times 10^{-16} \\ c_2 = 0.33333333333333565 \;\; , \;\; c_3 = 1.9999999999999953 \end{cases} \qquad (31)$$

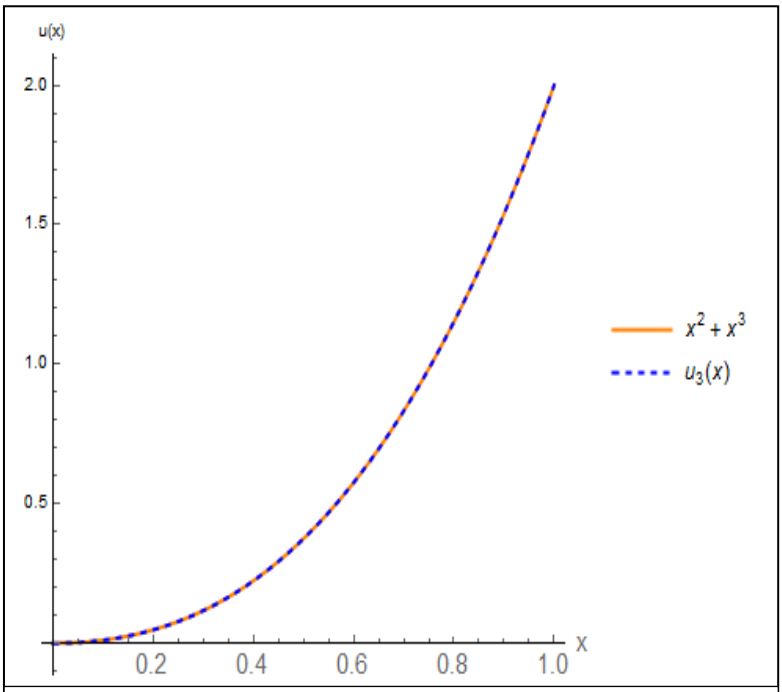
نعوض قيم هذه المعاملات في العلاقة (6) فنحصل على الحل التقريبي:

$$\bar{u}_3(x) = 3.465426803633579 \times 10^{-16} - 2.695593045602269 \times 10^{-15}\,x + 1.0000000000000113\,x^2 + 0.9999999999999865\,x^3 \;. \qquad (32)$$

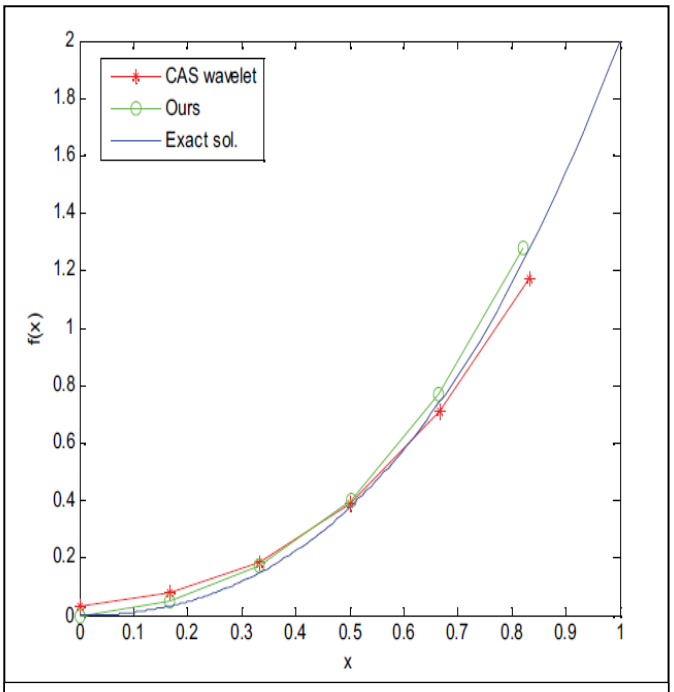
الجدول(3): مقارنات للحل العددي والخطأ المطلق الناتج عنه بالطريقة المقترحة باستخدام تقريبات برنشتاين و لاغير:

		الطريقة المقترحة مع تقريب لاغير $(n = 3)$		الطريقة المقترحة مع تقريب برنشتاين$(n = 3)$	
x	الحل الدقيق	الحل العددي	الخطأ المطلق	الحل العددي	الخطأ المطلق
$1/8$	0.017578125	0.017578125	0.0	0.01757812500000016	1.56125 E-16
$2/8$	0.078125	0.07812500000000355	3.55271 E-15	0.07812500000000017	1.66533 E-16
$3/8$	0.193359375	0.19335937500000355	3.55271 E-15	0.1933593750000002	1.94289 E-16
$4/8$	0.375	0.375	0.0	0.3750000000000001	1.11022 E-16
$5/8$	0.634765625	0.634765624999988	1.19904 E-14	0.6347656249999998	2.22045 E-16
$6/8$	0.984375	0.9843749999999631	3.68594 E-14	0.984374999999999	9.99201 E-16
$7/8$	1.43554688	1.4355468749999232	7.68274 E-14	1.4355468749999976	2.44249 E-15

في الجدول(3): أظهرت النتائج العددية أنَّ تقريب برنشتاين أفضل من تقريب لاغير.



الشكل(2): الحل العددي بالطريقة المقترحة (باستخدام تقريب برنشتاين لأجل $n = 3$) مع الحل الدقيق.



الشكل(3): الحل العددي مع الحل الدقيق بطريقة Yi وآخرون في [21]

المثال(3): لتكن معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية الكسرية التالية: [22]

$$D^{1/3}u(x) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\Gamma\left(\frac{13}{6}\right)}\,x^{\frac{7}{6}} - \frac{2}{63}\,x^{\frac{9}{2}}\,(9 + 7x^2) + \int_0^x (x\tau + x^2\tau^2)\,u(\tau)\,d\tau \quad , \quad 0 \le x \le 1 \tag{33}$$

مع الحل الدقيق: $\{\, u(0) = 0 \quad , \quad u(x) = x^{\frac{3}{2}} \,\}$.

الحل: باستخدام الطريقة العددية المقترحة مع تقريب لاغير لأجل $(n = 8)$ نحصل على قيم المعاملات الآتية:

$$\begin{cases} a_0 = 14084.972175160892\,,\ a_1 = -120932.0339900285\,,\ a_2 = 454574.07512987434 \\ a_3 = -977061.3110105841\,,\ a_4 = 1313468.576060324\,,\ a_5 = -1130872.805641592 \\ a_6 = 609007.2758997582\,,\ a_7 = -187563.70681607086\,,\ a_8 = 25294.95553630142 \end{cases} \tag{34}$$

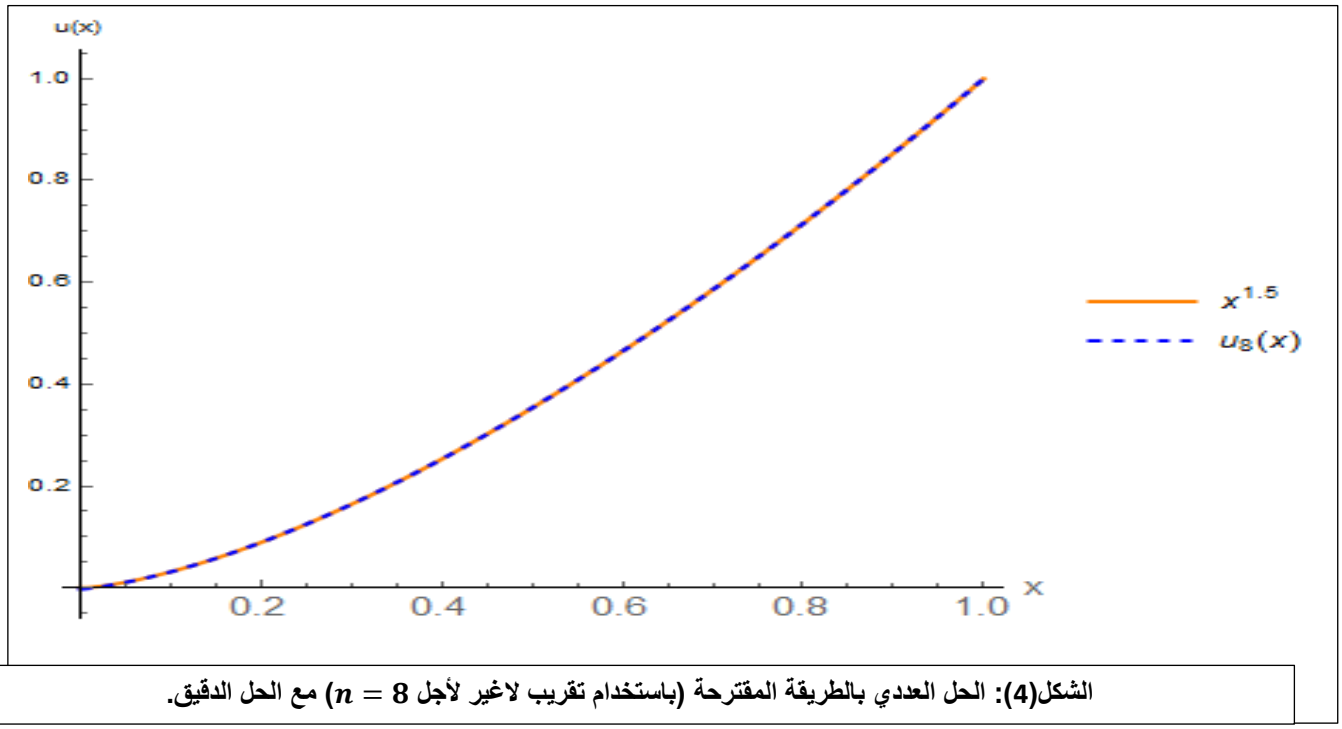
بتعويض قيم هذه المعاملات في العلاقة (8) نحصل على الحل التقريبي:

$$\bar{u}_8(x) = -0.002656857017427683 + 0.18875223444774747\,x + 1.7962097311392426\,x^2 - 3.037713391473517\,x^3 + 5.45147197303595\,x^4 - 7.087638769568002\,x^5 + 6.000115560697054\,x^6 - 2.935701879829459\,x^7 + 0.6273550480233486\,x^8\,. \tag{35}$$

باستخدام الطريقة العددية المقترحة مع تقريب برنشتاين لأجل $(n = 8)$ نحصل على الحل التقريبي:

$$\bar{u}_8(x) = -0.002656783259744807 + 0.18875039370947685\,x + 1.796228496943602\,x^2 - 3.0378137501154985\,x^3 + 5.451783699499181\,x^4 - 7.0882215952093475\,x^5 +$$

$$6.00076193580837\,x^6 - 2.9360932523307355\,x^7 + 0.6274545996977263\,x^8 \,. \quad (36)$$



الشكل(4): الحل العددي بالطريقة المقترحة (باستخدام تقريب لاغير لأجل $n = 8$) مع الحل الدقيق.

الجدول(4): الحل العددي والأخطاء المطلقة الناتجة عنه بالطريقة المقترحة بإستخدام تقريبات برنشتاين و لاغير :

		الطريقة المقترحة مع تقريب لاغير $(n = 8)$		الطريقة المقترحة مع تقريب برنشتاين $(n = 8)$	
x	الحل الدقيق	الحل العددي	الخطأ المطلق	الحل العددي	الخطأ المطلق
0.1	0.0316227766	0.03162273397579708	4.26259 E-8	0.03162273691167781	3.96900 E-8
0.2	0.0894427191	0.08944261917724489	9.99227 E-8	0.08944262142173956	9.76783 E-8
0.3	0.1643167673	0.16431659532851461	1.71923 E-7	0.1643165969676943	1.70284 E-7
0.4	0.2529822128	0.25298196097996417	2.51834 E-7	0.252981961650776	2.51163 E-7
0.5	0.3535533906	0.35355304617887895	3.44414 E-7	0.35355304667810455	3.43915 E-7
0.6	0.4647580015	0.4647575545070154	4.47038 E-7	0.4647575547101938	4.46835 E-7
0.7	0.5856620186	0.5856614471638548	5.71410 E-7	0.5856614477859742	5.70788 E-7
0.8	0.7155417528	0.7155410483472655	7.04453 E-7	0.7155410474518531	7.05348 E-7
0.9	0.8538149682	0.8538140007386432	9.67507 E-7	0.8538139994159216	9.6883 E-7
1.0	1.0	1.0001936494549373	1.93649 E-4	1.0001937447430274	1.93745 E-4

الجدول(5): الأخطاء المطلقة الناتجة عن الحل العددي لطريقة Kumar وآخرون :

		الخطأ المطلق [22]		
x	الحل الدقيق	Linear scheme $S_1(n = 10)$	Quadratic scheme $S_2(n = 10)$	Quadratic-linear scheme $S_3(n = 10)$
0.2	0.0894427191	3.745 E-3	1.645 E-4	6.55 E-4

0.4	0.2529822128	3.844 E-3	6.33 E-4	6.55 E-4
0.6	0.4647580015	4.052 E-3	4.99 E-4	5.83 E-4
0.8	0.715542	4.698 E-3	4.97 E-4	7.22 E-4
1.0	1.0	6.34 E-3	6.10 E-4	1.15 E-3

البرامج بلغة Mathematica:

برنامج Mathematica للمثال(1) لأجل$(n = 6)$:

```
Clear[I1,I2,I3,J,JF,c[0.],c[1.],c[2.],c[3.],c[4.],c[5.],c[6.],ψ,YN,R]
α=2.3;
ψ=(Gamma[4.5]/Gamma[2.2])*x^1.2-(1/99)*x^5.5-(1/11)*x;
YN=0;
For[i=0,i<=6,YN=YN+c[i-1.]*LaguerreL[i-1,t],i++]
I1=Integrate[0.25*(x-t)*(YN),{t,0,x}];
I2=Integrate[0.5*x *t*(YN),{t,0,1}];
I3=I1+I2;
J=(1/Gamma[α])*Integrate[((t-x)^(α-1))*I3,{x,0,t}];
JF=(1/Gamma[α])*Integrate[((t-x)^(α-1))*ψ,{x,0,t}]
R[t_]=YN-J-JF;
NSolve[{R[0.1]==0,R[0.2]==0,R[0.3]==0,R[0.4]==0,R[0.5]==0,R[0.6]==0,R[0.7]==0},{c
[0.],c[1.],c[2.],c[3.],c[4.],c[5.],c[6.]}];
Plot[{x^3.5, u_n[x]}, {x, 0,1}, PlotStyle →
{Directive[Orange, Thick], Directive[Blue, Dashed, Thick]}, AspectRatio →
1, AxesStyle → {Directive[ColorFunction → Hue, 15], Black}, PlotLegends →
"Expressions", AxesLabel → {"x", "y"}]
```

برنامج Mathematica للمثال(2) لأجل$(n = 3)$:

```
Clear[I1,I2,I3,J,JF,c[0.],c[1.],c[2.],c[3.],ψ,YN,R]
α=0.25;
ψ=(Gamma[3]/Gamma[2.75])*x^(1.75)+(Gamma[4]/Gamma[3.75])*x^(2.75)-(Sqrt[Pi]*
Gamma[3]/(2Gamma[3.5]))*x^(2.5)-(Sqrt[Pi]* Gamma[4]/(2Gamma[4.5]))*x^(3.5)-
(7x/36)+(3/20);
YN=0;
For[i=0,i<=3,YN=YN+c[i-1.]*LaguerreL[i-1,t],i++]
I1=Integrate[0.5*((x-t)^(-0.5))*(YN),{t,0,x}];
I2=Integrate[(1/3)*(x-t)*(YN),{t,0,1}];
I3=I1+I2;
J=(1/Gamma[α])*Integrate[((t-x)^(α-1))*(I3),{x,0,t}];
JF=(1/Gamma[α])*Integrate[((t-x)^(α-1))*ψ,{x,0,t}];
R[t_]=YN-J-JF;
NSolve[{R[0.1]==0,R[0.2]==0,R[0.3]==0,R[0.4]==0},{c[0.],c[1.],c[2.],c[3.]}];
Plot[{x^2 + x^3, u_n[x]}, {x, 0,1}, PlotStyle →
{Directive[Orange, Thick], Directive[Blue, Dashed, Thick]}, AspectRatio →
1, AxesStyle → {Directive[ColorFunction → Hue, 15], Black}, PlotLegends →
"Expressions", AxesLabel → {"x", "y"}]
```

الاستنتاجات والتوصيات:

استخدمنا في عملنا هذا طريقة عددية لحل معادلة فولتيرا–فريدهولم التفاضلية–التكاملية ذات المشتق الكسري وفق مفهوم مشتق كابوتو الكسري، وقد بينت النتائج العددية دقة الطريقة وفعاليتها مقارنة مع طرائق أخرى مثل الطريقة الهجينية من كثيرات حدود برنولي ودوال القطع النبضية[19] وطريقة دوال Hat المعممة [20] وطريقة مويجات ليجندر[21] وكذلك مع ثلاث مخططات عددية[22] ، حيث بيّنت الرسوم البيانية تقارب الحل العددي من الحل التحليلي على طول مجال الحل. نظراً لنجاح الطريقة المقترحة إلى حد كبير في إيجاد الحل التقريبي لمعادلة فولتيرا–فريدهولم التفاضلية–التكاملية الكسرية، نوصي بحل جمل معادلات فولتيرا–فريدهولم التفاضلية–التكاملية الكسرية، وتطوير الطريقة لإيجاد الحل التقريبي لمعادلة فولتيرا–فريدهولم التفاضلية–التكاملية الكسرية المختلطة اللّاخطية.

References:

[1] M. P.Lazarević, M. R.Rapaić, T. B.Šekara, V.Mladenov, & N.Mastorakis, Introduction to fractional calculus with brief historical background. *Advanced topics on applications of fractional calculus on control problems, system stability and modeling*, 3-16, 2014.

[2] H. M. Srivastava, Fractional-order derivatives and integrals: Introductory overview and recent developments. *Kyungpook Mathematical Journal*, *60*(1), 73-116, 2020.

[3] A.Duangpan, R.Boonklurb, & M.Juytai, Numerical solutions for systems of fractional and classical integro-differential equations via Finite Integration Method based on shifted Chebyshev polynomials. *Fractal and Fractional*, *5*(3), 103, 2021.

[4] J. A.Nanware, P. M.Goud, & T. L. Holambe, Numerical solution of fractional integro-differential equations using Hermite polynomials. *J. Math. Comput. Sci.*, *11*(6), 8448-8457, 2021,.

[5] O.Taiye, T. O.Adebayo, A. A. James, I. A.Adam, & A. A. Muhammed, Numerical solution of system of linear fractional integro-differential equations by least squares collocation Chebyshev technique. *Mathematics and Computational Sciences*, *3*(2), 10-21, 2022,.

[6] M. H.Heydari, M. R.Hooshmandasl, C.Cattani, , & M.Li, Legendre wavelets method for solving fractional population growth model in a closed system. *Mathematical Problems in Engineering*, *2013*.

[7] Y. A.Amer, A. M. S.Mahdy, & E. S. M. Youssef, Solving fractional integro-differential equation s by using sumudu transform method and Hermite spectral collocation method. *Computers, Materials and Continua*, *54*(2), 161-180,2018.

[8] G.Shi, Y.Gong, & M. Yi, Alternative Legendre polynomials method for nonlinear fractional integro-differential equations with weakly singular kernel. *Journal of Mathematics*, 1-13, *2021*.

[9] T.Oyedepo, A. F.Adebisi, M. T.Raji, M. O.Ajisope, J. A.Adedeji, J. O.Lawal, & O. A. Uwaheren, Bernstein modified homotopy perturbation method for the solution of Volterra Fractional integro-differential equations,". *Pasifi Journal of Science and Technology*, *22*(1), 30-36,2021.

[10] Y.Talaei, S.Noeiaghdam, & H. Hosseinzadeh, Numerical solution of fractional Fredholm integro-differential equations by spectral method with fractional basis functions. *arXiv preprint arXiv:2209.10912*. (2022).
[11] T.Oyedepo, C. Y.Ishola, O. A.Uwaheren, M. L.Olaosebikan, M. O.Ajisope, & A. A. Victor, Least-squares Bernstein Method for Solving Fractional Integro-differential Equations. *ATBU Journal of Science, Technology and Education*, *10*(1, 105-114), 2022.
[12] Y.Rahrovi, Y.Mahmoudi, A.Salimi Shamloo, & M.Jahangiri Rad, Jacobi wavelets method for numerical solution of fractional population growth model. *Computational Methods for Differential Equations*, *11*(2), 387-398, 2023.
[13] K. S.Al-Ghafri, A. T.Alabdala, S. S.Redhwan, O.Bazighifan, A. H.Ali, & L. F.Iambor, Symmetrical solutions for non-local fractional integro-differential equations via caputo–katugampola derivatives. *Symmetry*, *15*(3), 662, 2023.
[14] M. S.Rawashdeh, H.Abedalqader, & N. A.Obeidat, Convergence analysis for the fractional decomposition method applied to class of nonlinear fractional Fredholm integro-differential equation. *Journal of Algorithms & Computational Technology*, *17*, 17483026221151196. 2023.
[15] P. M.Goud, J. A.Nanware, T. L.Holambe, & N. B. Jadhav, Approximate Method for Solving System of Linear Fredholm Fractional Integro-Differential Equations Using Least Squares Method and Lauguerre Polynomials. Communications in Mathematics and Applications, 14(1), 459-470, 2023.
[16] T.Luga, S. S.Isah, & V. B. Iyorter, Laguerre collocation method for solving higher order linear boundary value problems. Engineering and Applied Science Letters, 4(1, 42-49), 2021.
[17] S. A. Abumaryam, The Convergence rates of chebyshev Interpolation. Journal of Pure & Applied Sciences, 17(1), 2018.
[18] H.Khosravian-Arab, & D. F. Torres, Uniform approximation of fractional derivatives and integrals with application to fractional differential equations. *arXiv preprint arXiv:1308.0451*, 2013.
[19] I. F. V.Pecahan, A.SAADATMANDI, & S. AKHLAGHI, Using hybrid of Block-Pulse functions and Bernoulli polynomials to solve fractional Fredholm-Volterra integro-differential equations. Sains Malaysiana, 49(4, 953-962), 2020.
[20] B.Li, Numerical solution of fractional Fredholm-Volterra integro-differential equations by means of generalized hat functions method. CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 99(2), 105-122, 2014.
[21] M.Yi, L.Wang, & J.Huang, Legendre wavelets method for the numerical solution of fractional integro-differential equations with weakly singular kernel. Applied Mathematical Modelling, 40(4), 3422-3437, 2016.
[22] K.Kumar, R. K.Pandey, & S.Sharma, Comparative study of three numerical schemes for fractional integro-differential equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 315, 287-302, 2017,