Study of the group of equivalence classes of quadratic ideals for some types of quadratic algebraic fields

Dr. Hassan Sankari*
Muhammad Mahfoud**

(Received 17 / 11 / 2024. Accepted 6 / 3 /2025)

□ ABSTRACT □

This article aims to study the quadratic algebraic fields of the type (R-D) for some special values of d, as we know that the fields of the type (R-D) if d≠5, where $d = n^2 + r$ is a positive square-free integer satisfying $-n < r \leq n$ & $r|4n$ then the quadratic field $K = Q(\sqrt{d})$ is a real quadratic field of the Richard-Degert type and we denote it by the symbol (R-D). This pattern has attracted the interest of many researchers, as Mishra, Hogue, and Chakarborty studied the structure of the $CL(k)$ group of order 4 for quadratic fields of the type $Q(\sqrt{n^2+1})$) in 2021. In 2020, Hogue and Kotyada studied the problem of the uniqueness of the analysis for fields of the type $Q(\sqrt{n^2+2r})$). In 2016, Biro, Kim, and Labkova studied the problem of the uniqueness of the analysis for quadratic fields of the type $Q(\sqrt{(an)^2+4a})$ In this research, we studied these fields for d= $n^2 + 2$ & $d = p^2t^2 +$ pt where p is a prime number & t is a positive square-free integer

Keywords : Group of equivalences , Main Ideals Domain , unique analysis Domain, equivalent of Zeta function , Dedkind global sum .

Copyright **:**Tishreen University journal-Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

* **professor,Department of mathematics ,Faculty of Science ,Tishreen University, Lattakia ,Syria .**
** **Postgraduate Student (Master), Mathematics Department ,Faculty of Science ,Tishreen University, Lattakia ,Syria .**

دراسة زمرة صفوف تكافؤ ايديالات تربيعية لبعض الأنماط من الحقول الجبرية التربيعية

د. حسن سنكري*

محمد محفوض**

(تاريخ الإيداع 17 / 11 / 2024. قُبِل للنشر في 6 / 3 /2025)

□ ملخّص □

يهدف هذا المقال لدراسة الحقول الجبرية التربيعية من نمط $(R-D)$ لأجل بعض القيم الخاصة ل d ، حيث أنه من المعلوم لدينا أن الحقول من النمط $(R-D)$ إذا كان $d \neq 5$ ، حيث $d = n^2 + r$ عدد صحيح موجب حر من التربيع يحقق $-n < r \leq n$ & $r|4n$ عندئذ الحقل التربيعي $K = Q(\sqrt{d})$ هو حقل تربيعي حقيقي من نوع ريتشارد ديكيرت (Richard–Degert) و نرمز له بالرمز (R–D) .

وقد أثار هذا النمط اهتمام الكثير من الباحثين حيث قام chakarborty , Hogue, Mishra عام 2021 بدراسة بنية زمرة الصفوف CL(k) التي رتبها 4 لأجل الحقول التربيعية من النمط $Q(\sqrt{n^2+1})$ وفي عام 2020 قام Hogue و Kotyada بدراسة مسألة وحدانية التحليل للحقول من النمط $Q(\sqrt{n^2+2r})$ و في عام 2016 قام Biro و Kim و Labkova بدراسة مشسألة وحدانية التحليل للحقول التربيعية من النمط $Q(\sqrt{(an)^2+4a})$.

وقد قمنا في هذا البحث بدراسة هذه الحقول لأجل $d = n^2 + 2$ & $d = p^2t^2 + pt$ حيث p عدد أولي & t عدد صحيح موجب حر من التربيع .

الكلمات المفتاحية : زمرة الصفوف ، ساحة الايديالات الرئيسية ، ساحة التحليل الوحيد ، صف التابع زيتا ، مجموع ديدكيند المعمم.

حقوق النشر : مجلة جامعة تشرين– سورية، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب الترخيص CC BY–NC–SA 04

*أستاذ– قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية –سورية.

**طالب دراسات عليا(ماجستير)– قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية –سورية

مقدمة :

يعد الجبر من أهم فروع الرياضيات، وتتعدد المواضيع المهمة في الجبر و المتعلقة بنظرية (الزمر والحلقات والحقول،....) ، منها زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات و يعد إيجاد رتبة هذه الزمرة من أكثر المواضيع أهمية و خاصة في توسيعات الحقول و النظرية الجبرية للأعداد ، وقد شغلت هذه المسألة حيزاً هاما في الأبحاث العلمية بدءاً من Gauss الذي اهتم بدراسة رتبة صفوف التكافؤ(Class numbers) في الحقول العددية و بشكل خاص الحقول التربيعية التخيلية ، حيث أثبت أنه يوجد بالضبط 9 حقول تربيعية تخيلية بحيث يكون $h_k = 1$.

ومن المسائل المهمة المرتبطة بهذا الموضوع إيجاد بعض الخواص لزمرة صفوف التكافؤ و بعض النتائج المرتبطة بها، وإيجاد حد أدنى أو أعلى ل h_k لأجل أسر معينة من الحقول التربيعية الحقيقية من النمط Richard–Degert(R–D) السؤال المهم هنا ماهي الأشكال الخاصة من نمط (R–D) لd والتي يمكن إيجاد حد أدنى لh_k وبعض الخواص الجبرية لهذه الأشكال الخاصة بالاعتماد على صيغة Lang لحساب قيمة صف التابع زيتا $\xi_k(S,H)$.

ومن الجدير بالذكر أن Yokoi قام عام 1970 بإيجاد قيمة عنصر الواحدة الأساسي لأجل أسرة من الحقول الجبرية التربيعية الحقيقية من النمط (R–D) لأجل $d = p^2m^2 + 4t$ حيث p عدد أولي و m عدد صحيح موجب والتي تم الإعتماد عليها لإيجاد حد أدنى ل h_k باستخدام مجموع ديدكيند المعمم .

أهمية البحث و أهدافه :

يهدف هذا البحث لدراسة الحد الأدنى ل h_k (رتبة زمرة صفوف تكافؤ الايديالات التربيعية) لأجل$d = n^2 + 2$ & $d = p^2t^2 + pt$ من نمط (R–D) و إيجاد بعض الخواص الجبرية لها .

طرائق البحث ومواده :

اعتمدنا في هذه الدراسة على تعاريف ومبرهنات أساسية و نتائج متعلقة برتبة زمرة الصفوف لحقول تربيعية من نمط (R–D) مستخلصة من مراجع علمية تخصصية و بحوث علمية منشورة في دوريات عالمية .

المفاهيم الأساسية والرموز المستخدمة :

تعريف1,[1][12] ، ساحة الإيديالات الرئيسية : إذا كان كل إيديال في الساحة الصحيحة D إيديال رئيسي فإنه يقال عن D أنها ساحة ايديالات رئيسية .

تعريف 2,[12] ، الساحة واحدية التحليل : نقول عن الساحة D أنها ساحة واحدية التحليل (ساحة تحليل وحيد) إذا كان كل عنصر $\propto \in D$ يكتب بشكل وحيد كجداء منته لعناصر غير خذوله .

تعريف 3,[1] : الايديال الكسري : لتكن D ساحة صحيحة و K حقل كسور D ، وليكن M مودول جزئي في K ، عندئذ إذا وجد عدد صحيح m بحيث $mM \subseteq D$ فإن M ايديال كسري في D.

تعريف 4,[1] : نظيم و أثر عنصر : بفرض $K = Q(\sqrt{d})$ حقل تربيعي عندئذ :

نظيم أي عنصر $B = a + b\sqrt{d}$ يعرف بالصيغة :

$$N(B) = B\bar{B} = a^2 - db^2$$

و أثر العنصر B بالصيغة :

$$T(B) = B + \bar{B} = 2a$$

تمهيدية [1] : بفرض $K = Q(\sqrt{d})$ حقل تربيعي حيث d عدد صحيح حر من التربيع :

1. إذا كان $d \equiv 1(mod\ 4)$ ، و a, b, c, d أعداد صحيحة ، و $a \neq 0$ و $c \neq 0$ و كان $b \equiv c\ (mod\ 2)$ و $4ac|b^2 - dc^2$ و $c|b, c|a$ فإن:

$$N\big((a, b + c\sqrt{d})\big) = |ac|$$

تعريف 5,[1] :زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات : ليكن $\mathbb{k}$ حقل أعداد جبرية ولتكن $H(\mathbb{k})$ زمرة جميع الايديالات الكسرية المختلفة عن الصفر في θ_k عندئذ $(H(\mathbb{k}),.)$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة التبديلية $(E(\mathbb{k}),.)$ حيث $(.)$ هي عملية جداء الايديالات عندئذ :

$$CL(\mathbb{k}) = H((\mathbb{k}))/E(\mathbb{k}) = \{\mathfrak{b}E(\mathbb{k}); \mathfrak{b} \in H((\mathbb{k})\} = \{[\mathfrak{b}]; \mathfrak{b} \in H((\mathbb{k})\}$$

تشكل زمر تبديلية بالنسبة لعملية جداء الصفوف وتسمى زمرة صفوف تكافؤ الايديالات .

تعريف 6,[10] : ليكن $d \neq 5$ و $d = n^2 + r$ عدد صحيح موجب حر من التربيع يحقق: $-n < r \leq n$ & عندئذ الحقل التربيعي $K = Q(\sqrt{d})$يسمى حقل تربيعي حقيقي من نوع ريتشارد ديكيرت (Richard–Degert) و نرمز له بالرمز (R–D) .

تمهيدية [10] : ليكن $K = Q(\sqrt{d})$ حقل تربيعي حقيقي من نوع (R–D) عندئذ عنصر الوحدة الأساسية ξ و هو أصغر عنصر وحدة أكبر من 1 و نظيمه $N(\xi)$ يعطى بالصيغة :

$$\xi = \begin{cases} n + \sqrt{n^2 + r}\ ;\ N(\xi) = -sgnr\ if\ |r| = 1 \\ n + \sqrt{n^2 + r}/2\ ;\ N(\xi) = -sgnr\ if\ |r| = 4 \\ 2n^2 + r/_{|r|} + \dfrac{2n}{|r|}\sqrt{n^2 + r}\ ;\ N(\xi) = 1\ if\ |r| \neq 1,4 \end{cases}$$

تعريف 7,[17] : أعداد برنولي : نرمز لأعداد برنولي بالرمز B_n حيث $n \in \mathbb{N}$ و تعطى بالعلاقة :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0\ ; B_0 = 1\ \&n \geq 2$$

تعريف 7,[17] : كثيرات حدود برنولي : نرمز لكثيرة حدود برنولي بالرمز $B_n(x)$ حيث $n \in \mathbb{N}$ و تعطى بالصيغة:

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (\binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

حيث B_k أعداد برنولي.

تعريف 7,[5][3] :مجموع ديدكيند المعمم :

لتكن h, c أعداد صحيحة ، $\gcd(h, c) = 1\ \&\ c > 0$ ، عندئذ يعرف مجموع ديدكيند المعمم $S_{2n}{}^{(m)}(h, c)$ حيث $m = 0,1,2,3, \ldots\ldots, 2n$ بالصيغة :

$$S_{2n}{}^{(i)}(h, c) = \sum_{j(mod\ c)} B_m \left(\frac{h_j}{c} - \left[\frac{h_j}{c}\right]\right) B_{2n} - m(\frac{j}{c} - \left[\frac{j}{c}\right])$$

حيث $[k]$ دالة الجزء الصحيح للعدد x و $B_n(x)$ كثيرات حدود برنولي .

تمهيدية [9,10,15] : ليكن $m > 0$ عدد صحيح عندئذ :

$$i.\, s^3(\pm 1, m) = \pm \frac{-m^4 + 5m^2 - 4}{120m^3}$$

$$ii.\, s^2(\pm 1, m) = \pm \frac{m^4 + 10m^2 - 6}{180m^3}$$

حيث تفيد هذه التمهيدية في إعطاء قيمة مباشرة لمجموع ديدكيند المعمم في حالتين خاصتين .

تمهيدية [9,10,15] : بفرض H هو صف ايديالات في $CL(\mathbb{k})$ عندئذ لحساب مجموع ديدكيند المعمم لهذا الصف $\zeta_k(-1, H)$ فإن :

$$\zeta_k(-1, H) = \left(\frac{sgn\delta(\mathfrak{b}) r_1 r_2}{360 N(\mathfrak{b}) c^3}\right)^{-s} (a+d)^3 - 6(a+d)N(\zeta) - 240c^3 sgns^3(a,c)$$
$$+ 180ac^3 sgncs^2(a,c) - 240c^3 sgncs^3(d,c) + 180dc^3 sgncs^2(d,c)$$

حيث $N(\mathfrak{b})$ هو نظيم الايديال $\mathfrak{b}$ وحيث أن :

$$a = T_r\left(\frac{r_1 \acute{r_2} \zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right) \;, b = T_r\left(\frac{r_1 \acute{r_1} \zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right), \qquad c = T_r\left(\frac{r_2 \acute{r_2} \zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right), \mathrm{d} = T_r\left(\frac{r_1 \acute{r_2} \acute{\zeta}}{\delta(\mathfrak{b})}\right)$$

حيث أن $\{r_1, r_2\}$ قاعدة صحيحة للايديال $\mathfrak{b}$ في H^{-1} & $\delta(\mathfrak{b}) = \boldsymbol{r_1 \acute{r_2} - r_2 \acute{r_1}}$.

التمهيدية أعلاه تعد التمهيدية الأساسية في هذا البحث حيث أنها تعطي صيغة لمجموع ديدكيند المعمم لأجل أي صف ايديالات في $CL(\mathbb{k})$ ومن ثم استخدامها في بعض الانواع الخاصة في الحقول الجبرية التربيعية من نمط (R−D).

تمهيدية [10] : ليكن $K = Q(\sqrt{d})$ حقل تربيعي حقيقي من نوع (R−D) وليكن A صف الايديالات الرئيسية للحقل $\mathbb{k}$ فإن :

1. $d = n^2 + r \equiv 2,3(mod 4)$

i. $|r| \neq 1,4$

$$\zeta_k(-1, A) = \frac{4n^3(r^2+1) + 2nr(3r^2 + 5r + 3)}{180r^2}$$

ii. $|r| = 1,4$

$$\zeta_k(-1, A) = \frac{4n^3 + 5n \pm 6n}{180}$$

2. $d = n^2 + r \equiv 1(mod\ 4)$

i. $|r| = 1,4$

$$\zeta_k(-1, A) = \begin{cases} \dfrac{4n^3(r^2+1) + n(3r^3 + 50r^2 + 3r)}{720r^2} \; if\ n\ even \\ \dfrac{4n^3(r^2+16) + n(3r^3 + 20r^2 + 48r)}{720r^2} \; if\ n\ odd \end{cases}$$

ii. $|r| = 4$ عندئذ n فردي :

$$\zeta_k(-1,A)=\frac{n^3+5n\pm 6n}{360}$$

iii. $|r|=1$ عندئذ $r=1$ و n زوجي :

$$\zeta_k(-1,A)=\frac{n^3+1+n}{360}$$

مثال 1: ليكن $K=Q(\sqrt{d})$ حقل تربيعي حقيقي و $d=n^2+3$ و A صف الايديالات الرئيسية للحقل $\mathbb{k}$ فإنه لدينا الحالتين :

. الحالة الأولى : $d\equiv 2,3(mod4)$ وكذلك $|r|\neq 1,4$ ومنه :

$$\zeta_k(-1,A)=\frac{4n^3(10)+2n\times 3(27+15+3)}{180\times 9}=\frac{4n^3+27n}{162}$$

. الحالة الثانية :$d\equiv 1(mod\ 4)$ $|r|\neq 1$ ، فعندما n زوجي :

$$\zeta_k(-1,A)=\frac{2n^3(10)+n(3\times 27+50\times 9+9)}{720\times 9}=\frac{4n^3+27n}{162}$$

n فردي :

$$\zeta_k(-1,A)=\frac{2n^3(9+16)+n(3\times 27+20\times 9+48\times 3)}{720\times 9}=\frac{4n^3+27n}{162}$$

ومنه نجد أنه عندما $d=n^2+3$ من نمط $R-D$ فإنّ :

$$\zeta_k(-1,A)=\frac{4n^3+27n}{162}$$

مبرهنة 1: ليكن $K=Q(\sqrt{d})$ حقل أعداد حقيقي من نوع (R–D) و ليكن $d=n^2+2\equiv 2(mod\ 4)$ وليكن D صف ايديال ينتمي إليه $(2,\sqrt{d})$ عندئذ فإن :

$$\zeta_k(-1,D)=\frac{n^3+5n}{9}$$

الإثبات : بما أن $2|d$ فإن $<2,\sqrt{d}>^2=<2>$ ومنه بأخذ الايديال $\mathfrak{b}=<2,\sqrt{d}>$ ومنه $\{2,\sqrt{d}\}$ قاعدة صحيحة ل $\mathfrak{b}$ و كذلك : $\delta(\mathfrak{b})=4\sqrt{d}$, $r_1=\sqrt{d}\,, r_2=2,$ و كذلك:

$\zeta=(n^2+1)+n\sqrt{d}$ و $N(\zeta)=1$ ومنه نجد أن:

$$a=T_r\left(\frac{r_1\acute{r_2}\zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right)=n^2+1\ \ ,b=T_r\left(\frac{r_1\acute{r_1}\zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right)=\frac{nd}{2},c=T_r\left(\frac{r_2\acute{r_2}\zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right)=2\mathrm{n}\,,$$

$$\mathrm{d}=T_r\left(\frac{r_1\acute{r_2}\acute{\zeta}}{\delta(\mathfrak{b})}\right)=n^2+1$$

وكذلك لدينا :

$$S^3(d,c)=S^3(n^2+1,2n)=\sum_{j(mod\ 2n)}B_3((\frac{n^2+1}{2n})j-[\left(\frac{n^2+1}{2n}\right)j])B_1(\frac{j}{4n}-[\frac{j}{4n}])$$

$$= \sum_{j(mod\ 2n)} ((\frac{n}{2}+\frac{1}{2n})j - [\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2n}j\right)])B_1(\frac{j}{2n} - [\frac{j}{2n}]) = S^3(1,2n)$$

و بنفس الطريقة نجد أن :

$$S^3(d,c) = S^3(a,c) = S^3(1,2n)$$
$$S^2(d,c) = S^2(n+1,2n)) = S^2(1,2n)$$

ولكن وبما أن :$(a+d)^3 - 6(a+d)N(\zeta) = 8(n^2+1)^3 - 12(n^2+1)$

$$240c^3 sgncs^3(a,c) = 240(2n)^3 \frac{-(2n)^4 + 5(2n)^2 - 4}{120(2n)^3} = -8(4n^4 - 5n^2 + 1)$$

$$180ac^2 sgncs^2(a,c) = 180(n^2+1)\frac{(2n)^3((2n)^4 + 10(2n)^2 - 6)}{180(2n)^3}$$
$$= (n^2+1)((2n)^4 + 10(2n)^2 - 6)$$

ومنه نجد مما سبق أن :

$$\zeta_k(-1,A) = \frac{n^3+5n}{9}$$

و هو المطلوب .

نتيجة 1: إذا كان n زوجي & $d = n^2+2$ عدد صحيح حر من التربيع فإنه لأجل $K = Q(\sqrt{n^2+2})$ فإن : $h_k \geq 2$.

الإثبات :نفرض جدلا أن $h_k = 1$ ، فإن كل ايديال في θ_k رئيسي و منه $A = D$ حيث A هو صف ايديال ينتمي له $< 2, \sqrt{d} >$ و حسب المبرهنة 1 ،وبما أن $\zeta_k(-1,D) = \frac{n^3+5n}{36}$ و ذلك حسب التمهيدية *[10]* فإن :$\zeta_k(-1,D) \neq \zeta_k(-1,A) \Leftarrow A \neq D$ و منه يوجد على الاقلصف ايديالات غير رئيسي D في $CL(K)$ ومنه يكون $h_k \neq 1 \Leftarrow h_k \geq 2$ أي أن θ_k ساحة ايديالات رئيسية وهو المطلوب .

مبرهنة 2: ليكن $K = Q(\sqrt{d})$ حقل أعداد تربيعي حقيقي حيث :$d = n^2+2 \equiv 3(mod\ 4)$ ، و بفرض $n^2 - 6 \equiv 1(mod\ p)$ حيث p عدد أولي يحقق :$p > 3$ ، عندئذ فإن :

$$< \mathrm{p} >=< 3+\sqrt{d} >< 3-\sqrt{d} >$$

الإثبات : بما أن$n^2 - 6 \equiv 1(mod\ p)$ فإن $n^2 - 7 \equiv 0(mod\ p)$ ومنه $p|n^2-7$ و منه$p|d-9$ ومنه :$d \equiv 9(mod\ p)$ و بما أن : $\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{9}{p}\right) = 1$ فإن p ينفصل في K بالشكل $< \mathrm{p} >= P_1P_2$ ، سنبرهن أن

$$P_1 =< \mathrm{p}, 3-\sqrt{d} > \&P_2 =< \mathrm{p}, 3+\sqrt{d} >$$

إن $P_1 \& P_2$ ايديالين في $\theta_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ & $\{p, 3+\sqrt{d}\}$ قاعدة ل P_1 ، حيث $a = p, b = 3, c \equiv 1$ & $\{p, 3-\sqrt{d}\}$ قاعدة ل P_1 ، حيث $a = p, b = 3, c \equiv 1$ ومنه يكون :

$$P_1P_2 =< p^2, \mathrm{p}(3+\sqrt{d}), \mathrm{p}(3-\sqrt{d}), (3+\sqrt{d})(3-\sqrt{d}) >=$$
$$< p^2, \mathrm{p}(3+\sqrt{d}), \mathrm{p}(3-\sqrt{d}), (9-\mathrm{d}) >= pI$$

حيث $I =< \mathrm{p}, (3+\sqrt{d}), (3-\sqrt{d}), t >$ حيث $\gcd(p,6) = 1$ ومنه يوجد $a, b \in \mathbb{Z}$ بحيث

$$1 = pa + (3+\sqrt{d})b + (3-\sqrt{d})b \Rightarrow 1 \in I$$ ومنه

$$< 1 > = I \Rightarrow < p >=< p >< 1 >= P_1P_2$$ وهو المطلوب.

مبرهنة 3: ليكن $K=Q(\sqrt{d})$ حقل أعداد تربيعي حقيقي حيث: $d=n^2+2\equiv 3(mod\ 4)$ ، و بفرض $n^2-6\equiv 1(mod\ p)$ حيث p عدد أولي يحقق: $p>3$ ، فإن :

$$S^3(n^2+3n+1,np)=S^3(n(n+3)+1,np)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}B_3\left(\frac{k}{n}\right)B_1\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}B_3\left(\frac{n+pk+1}{np}\right)B_1\left(\frac{pk+1}{np}\right)$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}B_3\left(\frac{2n+pk+2}{np}\right)B_1\left(\frac{pk+2}{np}\right)+\cdots$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}B_3\left(\frac{-n+pk+p-1}{np}\right)B_1\left(\frac{pk+p-1}{np}\right)$$

الإثبات : لدينا $p|d-9$ ولنأخذ الايديال $\mathfrak{b}=<3+\sqrt{d},\mathrm{p}>$ فتكون $\{p,3+\sqrt{d}\}$ قاعدة صحيحة ل $\mathfrak{b}$ ، أي أن: $\delta(\mathfrak{b})=2p\sqrt{d}$ &$r_2=p$ &$r_1=3+\sqrt{d}$ و لدينا $\zeta=(n^2+1)+n\sqrt{d}$ & $N(\zeta)=1$

ومنه نجد أن :

$$a=T_r\left(\frac{r_1r_2'\zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right)=n^2+3n+1\ ,b=T_r\left(\frac{r_1r_1'\zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right)=\frac{n(d-9)}{p},$$
$$c=T_r\left(\frac{r_2r_2'\zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right)=\mathrm{np}\ ,\mathrm{d}=T_r\left(\frac{r_1r_2'\zeta'}{\delta(\mathfrak{b})}\right)=n^2-3n+1$$

و بما أن:

$$S^3(a,c)=S^3(n^2+3n+1,np)$$
$$=\sum_{j(mod\ 2n)}B_3((\frac{n^2+3n+1}{np})j-[\left(\frac{n^2+3n+1}{np}\right)j])B_1((\frac{j}{np})-[\frac{j}{np}])$$
$$=\sum_{j(mod\ 2n)}B_3((\frac{n(n+3)+1}{np})j-[\left(\frac{n(n+3)+1}{np}\right)j])B_1((\frac{j}{np})-[\frac{j}{np}])$$
$$=S^3(n(n+3)+1,np)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}B_3\left(\frac{(n+1)pk}{np}\right)B_1\left(\frac{pk}{np}\right)$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}B_3\left(\frac{(n+1)(pk+1)}{np}\right)B_1\left(\frac{pk+1}{np}\right)+\cdots$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}B_3\left(\frac{(n+1)(pk+p-1)}{np}\right)B_1\left(\frac{p+k-1}{np}\right)$$

الآن لنرمز ب $[x]$ للجزء العشري ل x فيكون: $\left\lfloor\frac{(n+1)pk}{np}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{k}{n}\right\rfloor;k>0$

$$\left\lfloor\frac{(n+1)(pk+1)}{np}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n+nk+1}{np}\right\rfloor;k\leq n-1$$

$$\left\lfloor \frac{(n+1)(pk+p-1)}{np} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-n+pk+p-1}{np} \right\rfloor ; k \le n-1$$

ومنه نجد أن

$$S^3(n(n+3)+1, np) + \sum_{k=0}^{n-1} B_3\left(\frac{k}{n}\right) B_1\left(\frac{k}{n}\right) + \\ = \sum_{k=0}^{n-1} B_3\left(\frac{n+pk-1}{np}\right) B_1\left(\frac{pk}{np}+1\right) + \cdots \\ + \sum_{k=0}^{n-1} B_3\left(\frac{-n+pk+p-1)}{np}\right) B_1\left(\frac{pk+p}{np}\right)$$

و هو المطلوب.

مبرهنة 4: ليكن $K = Q(\sqrt{d})$ حقل أعداد تربيعي حقيقي حيث: $d = p^2t^2 + pt$ ، حر من التربيع حيث p عدد أولي و t حر من التربيع ، وليكن Aصف الايديالات الرئيسية للحقل K فإن :

$$\zeta_k(-1, A) = \frac{p^3t^3 + p^2t^2 + 344pt + 720}{360}$$

الإثبات :

إن $d \equiv 2 (mod\ 4)$ سواء كان t فردي أم زوجي ، لأنه اذا كان t زوجي و حر من التربيع فإن: $pt \equiv 2 (mod\ 4)$ ومنه $pt + 1 \equiv 3 (mod\ 4)$ و بما أن $(pt, pt+1) = 1$ فإن :

$pt\ (pt+1) \equiv 2 (mod\ 4)$ ومنه $d \equiv 2 (mod\ 4)$ ، و إذا كان $pt \equiv 3 (mod\ 4)$ فإن

$pt + 1 \equiv 0 (mod\ 4)$ و هذا غير ممكن لأن d حر من التربيع و إذا كان $pt \equiv 1 (mod\ 4)$ فإن

$pt + 1 \equiv 2 (mod\ 4)$ وبما أن $(pt, pt+1) = 1$ ومنه $pt\ (pt+1) \equiv 2 (mod\ 4)$ وبالتالي

$d \equiv 2 (mod\ 4)$ وكذلك لدينا $\zeta = (pt+1) + 2\sqrt{d}$ و كذلك $N(\zeta) = 1$ و كذلك $\{1, 1+\sqrt{d}\}$ قاعدة ل θ_K و منه $\delta(\mathfrak{b}) = 2\sqrt{d}$ &$r_2 = 1$ &$r_1 = 1 + \sqrt{d}$ ومنه يكون لدينا:

$$a = T_r\left(\frac{r_1 r_2' \zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right) = pt + 3, b = T_r\left(\frac{r_1 r_1' \zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right) = 2(d-1),$$

$$c = T_r\left(\frac{r_2 r_2' \zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right) = 2\ , \mathrm{d} = T_r\left(\frac{r_1 r_2' \zeta'}{\delta(\mathfrak{b})}\right) = pt - 1$$

و بما أن: $-1 \equiv 3 (mod 2)$ فإن :

$$S^3(a,c) = S^3(d,c) = \sum_{j(mod\ 2)} B_3((\frac{pt-1}{2})j - [\left(\frac{pt-1}{2}\right)j])B_1((\frac{j}{2}) - [\frac{j}{2}]) \\ = \sum_{j(mod\ 2)} B_3(\frac{pt}{2}j - \frac{1}{2}j - [\left(\frac{pt}{2}\right)j - \frac{1}{2}j])B_1((\frac{j}{2}) - [\frac{j}{2}]) \\ = S^3(1,2) + j \sum_{j(mod\ 2)} B_3\left(-\frac{1}{2}j\right) = 0 + 0 + B_3(0) + 1 + B_3(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$$

وكذلك لدينا :

$$S^2(a,c)=S^2(d,c)=S^2(pt-1,2)=\sum_{j(mod\ 2)}B_2(\frac{pt}{2}j-\frac{1}{2}j-[(\frac{pt}{2}j)-\frac{1}{2}j])B_1(\frac{j}{p})$$

$$S^2(a,c)=\sum_{j(mod\ 2)}B_2\left(-\frac{1}{2}j\right)B_1(\frac{j}{2})=\sum_{j(mod\ 2)}B_2\left(-\frac{1}{2}j\right)(B_1(\frac{-j}{2})+j)$$

$$=S^3(1,2)+j\sum_{j(mod\ 2)}B_3\left(-\frac{j}{2}\right)=\frac{5}{144}+0\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{11}{12}=\frac{137}{144}$$

ومنه يكون لدينا :$(a+d)^3-6(a+d)N(\zeta)=8(pt+1)^3-12(pt+1)$

$$240c^3sgncs^3(a,c)=240(8)(s^3)(pt-1,2)=-4110$$

$$240c^3sgncs^3(d,c)=-1440$$

$$180ac^3sgncs^2(a,c)=180(pt+3)(8)(s^2)(pt-2,2)=1370pt+4110$$

$$180ac^2sgncs^2(d,c)=1440(pt-1)\left(\frac{137}{144}\right)=1370pt-1370$$

ومنه ومما سبق نجد :

$$\zeta_k(-1,A)=\frac{1}{360(8)}(8(pt+1)^3-12(pt+1)+2880+2740pt+2740)$$

ومنه نجد أن :$\zeta_k(-1,A)=\frac{p^3t^3+p^2t^2+344pt+720}{360}$

و هو المطلوب .

مثال 2 : بأخذ $p=3$ و $t=2$ نجد $d=42$ أي $K=Q(\sqrt{42})$ ومنه يكون :

$$\zeta_k(-1,A)=\frac{6^3+6^2+344\times6+720}{360}=\frac{3036}{360}$$

$$\zeta_k(-1,A)=\frac{253}{30}$$

مبرهنة 5: ليكن $K=Q(\sqrt{d})$ حقل أعداد حقيقي حيث $d=p^2t^2+pt$ وليكن $t\equiv0(modq)$ حيث q عدد أولي فردي و ليكن B صف ايديالات يحوي $<q,q+\sqrt{d}>$عندئذ:

$$\zeta_k(-1,B)=\frac{p^3t^3+6p^2t^2+(8pq^4+20pq^2+24q^4}{720q}$$

الإثبات: بما أن $t=ql$ فإن $d\equiv0(mod\ q)$ ومنه

$$<q>=<q,q+\sqrt{d}>^2=<q^2,q(q+\sqrt{d}),q^2-d>=<q>I$$

حيث : $I=<q,q(q+\sqrt{d}),\frac{q^2-d}{q}>$ لأنه لو كان العكس لكان : $(q,q^2-d)=1$ حيث

$\left(q,\frac{q^2-d}{q}\right)=1$ ومنه $q^2|q^2-d$ ومنه $q^2|pt$ و هذا يعني أن $q|p$ وهذا غير ممكن ومنه $\left(q,\frac{q^2-d}{q}\right)=1$

ومنه يوجد $a,b\in\mathbb{Z}$ بحيث أن : $1=qa+\frac{q^2-d}{q}b\Leftarrow1\in I\Leftarrow I=<1>\Leftarrow1\in I$

$\Leftarrow<q>=<q,q+\sqrt{d}>^2\in B^{-1}$ و بأخذ :

$<q,q+\sqrt{d}>=$ b فتكون $\{q,q+\sqrt{d}\}$ قاعدة صحيحة ل b حيث :

$\zeta = pt + 1 + 2\sqrt{d}$ و لدينا $r_1 = q + \sqrt{d}$ &$r_2 = q$&$\delta(\mathfrak{b}) = 2q\sqrt{d}$: ومنه نجد أن :

$$a = T_r\left(\frac{r_1 r_2' \zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right) = pt + 2q + 1, b = T_r\left(\frac{r_1 r_1' \zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right) = 2\frac{(d - q^2)}{q},$$

$$c = T_r\left(\frac{r_2 r_2' \zeta}{\delta(\mathfrak{b})}\right) = 2\mathrm{q}\,, \mathrm{d} = T_r\left(\frac{r_1 r_2' \zeta'}{\delta(\mathfrak{b})}\right) = pt - 2q + 1$$

ومنه نجد أن :

$$S^3(d,c) = S^3(pt + 2q + 1, 2q) =$$

$$= \sum_{j(mod\ 2q)} B_3((\frac{pt + 2q + 1}{2q})j - [\left(\frac{pt + 2q + 1}{2q}\right)j])B_1((\frac{j}{2q}) - [\frac{j}{2q}])$$

$$= \sum_{j(mod\ 2q)} B_3((\frac{pl}{2} + 1)j + \frac{j}{2q} - [\left(\frac{pl}{2} + 1\right)j + \frac{j}{2q}])B_1((\frac{j}{2q} - [\frac{j}{2q}]))$$

$$\sum_{j(mod\ 2q)} B_3(\frac{j}{2q})B_1(\left(\frac{j}{2q}\right) = S^2(1,2q) = -\frac{(2q)^4 + 5(2q)^2 - 4}{120(2q)^3}$$

ومنه نجد أن :

$$(a + d)^3 - b(a + d)N(\zeta) = (2pt + 2)^3 - b(2pt + 2) = 8(pt + 1)^3 - 12(pt + 1)$$

$$240c^3 sgncs^3(a,c) = 240(2q)^3(\frac{-(2q)^4 + 5(2q)^2 - 4}{120(2q)^3} = -8(4q^4 - 5q^2 + 1)$$

$$240c^3 sgncs^3(d,c) = -8(4q^4 - 5q^2 + 1)$$

$$180dc^3 sgncs^2(a,c) = 180(pt + 2q + 1)(2q)^3(\frac{(2q)^4 + 10(2q)^2 - 6}{180(2q)^3}$$

$$= (pt + 2q + 1)((2q)^4 + 10(2q)^2 - 6)$$

و كذلك لدينا :

$$180dc^3 sgncs^2(d,c) = (pt - 2q + 1)((2q)^4 + 10(2q)^2 - 6)$$

ومما سبق نجد أن :

$$\zeta_k(-1,B) = \frac{p^3t^3 + 6p^2t^2 + (8pq^4 + 20pq^2)t + 24q^4}{720q}$$

وهو المطلوب .

نتيجة 2: ليكن $K = Q(\sqrt{d})$ حقل أعداد حقيقي حيث $d = p^2t^2 + pt$ من نمط R–D حيث p عدد أولي و t حر من الترييع بحيث أن $t \equiv 0(modq)$ حيث q عدد أولي فردي فإن $h_K \geq 2$.

الإثبات : وجدنا في المبرهنة ④ أن :

$$\zeta_k(-1,A) = \frac{p^3t^3 + p^2t^2 + 344pt + 720}{360}$$

حيث Aصف الايديالات الرئيسية للحقل K فإن :

$$\zeta_k(-1,A) = \frac{2qp^3t^3 + 2qp^2t^2 + 688pt + 1404q}{720q} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ①$$

ومن جهة أخرى حسب المبرهنة ⑤ وجدنا :

$$\zeta_k(-1,B) = \frac{p^3t^3 + 6p^2t^2 + (8pq^4 + 20pq^2 + 24q^4}{720q} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ②$$

حيث B هو صف ايديالات يحوي $< q, q+\sqrt{d} >$ و بالمقارنة بين ① و ② نجد أنه اذا فرضنا جدلا أن $h_K = 1$ فإن $\zeta_k(-1,A) = \zeta_k(-1,B)$ و هذا يعني أن $p^3t^3 = 2qp^3t^3$ و هذا غير ممكن ومنه الفرض الجدلي خاطئ و بالتالي $\zeta_k(-1,A) \neq \zeta_k(-1,B)$ ومنه $h_K \geq 2$ لأنه يوجد على الأقل صف ايديال في $CL(K)$ ليس صف ايديالات رئيسية ، وهو المطلوب .

مثال 3 : نأخذ $p = 3$ و $t = 2$ نجد $d = 42$ أي $K = Q(\sqrt{42})$ ، وحسب مينكوفسكي فإن :

$n = 2$ & $r = 2$ & $s = 0$ ومنه : $D_k = 4 \times 42$ حيث أنَّ S هو عدد الجذور التخيلية ل $\sqrt{42}$ و r هو عدد الجذور الحقيقية و D_k هو مميز الحقل K .

وحسب مينكوفسكي سنجد حد مينكوفسكي M_k بالشكل :

$$M_k = (\frac{2}{\pi})^s \sqrt{|\Delta_k|}$$

ثم عدد الأعداد الأولية الأصغر من M_k و نوجد رمز ليجندر لكل منها فنحصل على مجموعة من الايديالات الأولية في O_k سنثبت أنه يوجد صف ايديالات في C_k زمرة الصفوف مختلف عن صف الايديالات الرئيسية حسب مينكوفسكي ومنه نحصل على تطبيق النتيجة ② بأن $h_K \geq 2$.

. لدينا : $M_k = \sqrt{168} < 13$ ومنه نجد :

$$\left(\frac{168}{2}\right) = 0 \;\&\; (\frac{168}{3}) = 0 \;\&\; \left(\frac{168}{4}\right) = 0$$

ومنه يكون لدينا :

$P^2 = < 2 >$, $P_1{}^2 = < 2 >$ ، $P_1{}^2 = < 7 >$ وكذلك :

$\left(\frac{168}{11}\right) = \left(\frac{4}{11}\right) = \left(\frac{7}{11}\right) = \left(\frac{6}{11}\right) = 1$ و منه يكون :

$P_3P_4 = < 11 >$ وكذلك لدينا :

$$\mathrm{P} = < 2, \sqrt{42} > \;\&\; P_1 = < 2, \sqrt{42} > \;\&\; P_2 = < 7, \sqrt{42} >$$

لأن كل من 2,3,7 تقسم 168 و منه يكون لدينا النظائم :

$$N(P_2) = 7 \;\; \& \;\; N(P_1) = 3 \;\&\; N(P) = 2$$

كذلك لدينا :

$$P_2 = < 11, 1+\sqrt{42} > \;\&\; P_4 = < 11, 1-\sqrt{42} >$$

ومنه : $N(P_4) = 11 \;\; \& \;\; N(P_2) = 11$

الأن بما أنَّ $P_1 \in 21 - 7\sqrt{42} = \propto$ و $R = 42 - 6\sqrt{42} \;\in P_2$

يكون : $\gamma \in P_4$ & $\gamma \in P_2, P_1$: إذا $\gamma = \beta - \propto = 21 + \sqrt{42} \in P_4$

ومنه : $P_2 - P_1 \backslash < \gamma >$ و منه يوجد J ايديال صحيح في O_K بحيث :

$< \gamma > = \mathrm{J}.(P_2 - P_1)$ و بأخذ النظيم :

$$21 = N(J)N(P_2 - P_1)$$

ومنه نجد حالتين :

الحالة الأولى : $N(J) = 3 \;\&\; N(P_2 - P_1) = 7$ ومنه $J = P_1$ ومنه

$P_1(P_2 - P_1) = A$ ومنه $P_1{}^2(P_2 - P_1)^2 = A$ ومنه $P_1{}^2 \in C_K$ فهو صف ايديالات في زمرة الصفوف .

الحالة الثانية : تماما كما في الحالة الأولى $N(P_2,P_1)=3\ \&\ N(J)=7$ يكون $J=P_2$ ومنه ${P_2}^2\in C_K$ إذا زمرة الصفوف في الحالتين تحوي صف ايديالات غير رئيسي على الأقل ومنه $h_K>2$ لأجل حالة خاصة من الحقول من نمط $R\text{–}D$ حيث $d=p^2t^2+pt$ حيث p أولي و t حر من التربيع .

نتيجة 3: ليكن $K=Q(\sqrt{d})$ حقل أعداد حقيقي حيث $d=p^2t^2+pt$ من نمط R–D حيث p عدد أولي و t حر من التربيع بحيث أن $q|t$ حيث q عدد أولي فإن $h_K\geq W(t)+1$.

الإثبات :

بفرض أن $q_i|t$ حيث أن $i\leq r\ \&\ q_i\neq p$ عدد أولي فردي و ليكن B_i صف ايديال يحوي $<q_i,q_i+\sqrt{d}>$ فبحسب المبرهنة ⑤ وجدنا :

$$\zeta_k(-1,B)=\frac{p^3t^3+6p^2t^2+(8p{q_i}^4+20p{q_i}^2)t+24{q_i}^4}{720q_i}$$

فإنه بحسب النتيجة 2 فإن $\zeta_k(-1,A)\neq\zeta_k(-1,B_i)$ و من جهة أخرى إذا فرضنا أن $\zeta_k(-1,B_i)=\zeta_k(-1,B_j)$ حيث $i\neq j$ فإن :

$$\frac{p^3t^3+6p^2t^2+(8p{q_i}^4+20p{q_i}^2)t+24{q_i}^4}{720q_i}=\frac{p^3t^3+6p^2t^2+\left(8p{q_j}^4+20p{q_j}^2\right)t+24{q_j}^4}{720q_j}$$

ومنه نجد أن :

$$p^3t^3q_j+6p^2t^2q_j+(8p{q_i}^4+20p{q_i}^2)tq_j+24{q_i}^4q_j=p^3t^3q_i+6p^2t^2q_i+\left(8p{q_j}^4+20p{q_j}^2\right)tq_i+24{q_j}^4q_i$$

ومنه نجد أن

$$\left(q_j-q_i\right)p^3t^3+\left(q_j-q_i\right)6p^2t^2+\left(q_i-q_j\right)\left({q_i}^2+q_iq_j+{q_j}^2\right)24q_iq_j+\left(q_j-q_i\right)4q_iq_jt\left(2{q_i}^2+2q_iq_j+2{q_j}^2+5\right)=0$$

وبما أن $i\neq j\Longleftarrow q_i\neq q_j\Longleftarrow {q_i}^2\neq {q_j}^2\Longleftarrow$

$$p^3t^3+6p^2t^2-\left({q_i}^2+q_iq_j+{q_j}^2\right)24+24q_iq_j-4pq_iq_jt+\left(2{q_i}^2+2q_iq_j+2{q_j}^2+5\right)=0$$

وهذه المعادلة غير قابلة للحل في $\mathbb{Z}$ ومنه الفرض الجدلي خاطئ و بالتالي $\zeta_k(-1,A)\neq\zeta_k(-1,B_i)$ حيث $i\neq j$ ومنه وبما أن مجموعة الصفوف $\{B_1,B_2,B_3,\dots,B_n\}$ هي مجموة صفوف إيديالات غير رئيسية مختلفة و $W(t)\geq 3$ ومنه $h_K\geq(W(t)+1$ وهو المطلوب .

مثال 4: نأخذ $p=2$ و $t=3$ نجد $d=30$ و منه $K=Q(\sqrt{30})$ و لدينا $q=3\backslash t$ ومنه $h_K\geq W(t)+1$

لكن $W(t)=W(-3)=2$ ومنه $h_K\geq 3$ و هو المطلوب .

الاستنتاجات والتوصيات:

من خلال دراستنا السابقة استنتجنا حد أدنى لرتبة زمرة صفوف تكافؤ الايديالات التربيعية الحقيقية من نمط (R–Dلبعض الاشكال الخاصة ل d و ذلك لأجل $d=n^2+2\ \&\ d=p^2t^2+pt$ حيث p عدد أولي فردي و t حر من التربيع .

نوصي بدراسة رتبة زمرة الصفوف لأجل أشكال أخرى ل d من نمط (R−D) و محاولة إيجاد بعض الخواص الجبرية لها و التي تفيد في تحديد قواسم رتبة زمرة الصفوف h_K و كذلك دراسة هذه الأنماط من الحقول الجبرية التربيعية بشكل أعم نحتاج لمعلومات جديدة مرتبطة بهذا الموضوع .

Reference

[1] Alaca,S,and Williams,K.S,(2004). Introductory algebraic number theory .New York,Kambridge University Press.

[2]Andreescu,T,and Andrica ,D.(2015),Quadratic Diophantine equations , .New York, Springer .

[3]Apostol ,T,M,(1950), Certain Lambert Series , Duke Mathematical journal ,17(2),147-157.

[4] Baker , A (1966), Linear Forms in the logarithms of algebraic numbers ,Mathematika ,13,204-216eory

[5] Barner ,K.(1969) Uber die Werte der Ringklassen-L-Funktionen reellquadratis cher Zahlkorper an naturlicher Argumentstellen ,Journal of Number theory,1,28-64.

[6] Biro',A,(2003),Yokoi's conjecture ,Acta Arith , 106,85-104.

[7] Biro',A,(2003),Chowla's conjecture ,Acta Arith , 107,179-194.

[8] Biro',A, and Lapkove ,K .(2016) , The class number one problem for the real quadratic fields $Q(\sqrt{(an)^2+4a}$, Acta Arith , 172(2),117-131.

[9]Byeon ,D. and Kim H ,K,(1996) . Class number 1 criteria for real quadratic fields of Richaud-Degert type journal of number theory ,57(2),328-339.

[10] Byeon ,D. and Kim H ,K,(1997) . Class number 2 criteria for real quadratic fields of Richaud-Degert type journal of number theory ,62(2),257-272.

[11] Byeon ,D. and Kim M, and Lee,J.(2008) . Mollin's conjecture . Acta Arith , 126,99-114.

[12] Cohn,H.(1962) Advanced Number theory Dover publ .

[13] Hakmi,H, and Ghazi,N.(2017). Extension of fields Damascus university ,faculty of science .

[14] Hoque , A. And Kotyada, S,(2020).Class number one problem for the real quadratic fields $Q(\sqrt{m^2+2r})$, Archiv der Mathematik , 116,33-36 .

[15] Kim, H,K.(1988) , A conjecture of S , Chowla and related topics in analytic number theory ph .D,thesis ,USA . the Johns Hopkins university Baltimore , MD .

[16] Lapkova, K.(2012). Class number one problem for real quadratic fields of certain type Acta Arithmetica ,153(3) ,281-298.

[17] Larson,N.(2019).The bemoulli numbers A Brief primer .

[18] Sankari ,H,Issa ,A.(2020). Lower Bound for The Class number of $Q(\sqrt{4m^2+1})$, International journal of Mathematics and Mathematical science.

[19] Sankari,H, Mulla ,M.(2021).Class number of real Quadratic fields , Tishreen University Journal .