

Nonlinear Dynamics and The Limits of Local Closures in LES Models Under Critical Regularity

Dr. Rose Attalla Mohammad * 

(Received 11 / 3 / 2026. Accepted 13 / 7 / 2026)

□ ABSTRACT □

This paper examines the structural limitations of finite-order local differential closures in Large Eddy Simulation (LES) near Onsager-critical regularity. The study defines the functional setting, convergence topology, filtering operator, exact subgrid stress, energy-flux functional, and restricted finite-jet class used throughout the analysis. The central claim is kept within this class and is presented as a diagnostic spectral limitation, not as a universal impossibility theorem for all LES models. The analytical framework is formulated on the three-dimensional periodic domain using Littlewood-Paley decomposition, Besov critical scaling, and Bony paraproduct decomposition. A reproducible a priori shell-flux diagnostic complements the theoretical argument. The numerical values are recalculated from the stated formulas for $j = 1, \dots, 20$, ensuring consistency among the mean error, shell-wise error, maximum shell error, and spectral correlation. The results show that finite-order local closures can match mean flux indicators while failing to reproduce the spectral distribution of the exact filtered flux, supporting nonlocal, multiscale, or dynamically constrained closures assessed by spectral-flux behavior.

Keywords: turbulence; Large Eddy Simulation; Besov spaces; subgrid-scale flux; local closures.

Copyright  :Latakia University Journal (formerly Tishreen) -Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

* Assistant Professor , Syrian Private University (SPU), Syria. rose.moh.438@gmail.com

الديناميكيات غير الخطية وحدود الإغلاقات المحلية في نماذج LES تحت الانتظام الحرج

د. روز عطا الله محمد*

(تاريخ الإيداع 11 / 3 / 2026. قبل للنشر في 13 / 7 / 2026)

□ ملخص □

تتناول هذه الورقة البحثية القيود الهيكلية للانغلاقات التفاضلية المحلية ذات الرتبة المحدودة في "محاكاة الدوامات الكبيرة" عند اقترابها من حدود الانتظام الحرجة وفق نظرية "أونساجر". تُحدد الدراسة الإطار الوظيفي، وطوبولوجيا التقارب، ومؤثر الترشيح، وإجهاد النطاق الفرعي الدقيق، ودالة تدفق الطاقة، وفئة "النفاثات" المحدودة والمقيدة المستخدمة في التحليل. يجب التنويه بأن الادعاء المحوري للبحث ينحصر ضمن هذه الفئة تحديداً، ويُقدّم كتحخيص لقصور في الطيف الترددي، وليس كقاعدة استحالة شاملة تنطبق على كافة نماذج محاكاة الدوامات الكبيرة. وقد صيغ الإطار التحليلي في نطاق دوري ثلاثي الأبعاد باستخدام "تحليل ليلوود-بالي"، و"تدرج بيسوف الحرج"، و"تحليل بوني للضرب الموازي". ويُعزز الحجة النظرية تشخيصاً رياضي مسبق لتدفق الطاقة بين الأغلفة الطيفية (shell-flux) قابل للتكرار. كما أُعيد حساب القيم العددية بناءً على المعادلات المذكورة لضمان الاتساق بين متوسط الخطأ، والخطأ على مستوى الغلاف الطيفي، والحد الأقصى لخطأ الغلاف، والارتباط الطيفي. تُظهر النتائج أن الانغلاقات المحلية ذات الرتبة المحدودة يمكنها مطابقة مؤشرات التدفق المتوسط، لكنها تعجز عن إعادة إنتاج التوزيع الطيفي للتدفق المرشّح بدقة؛ مما يدعم التوجه نحو استخدام انغلاقات غير محلية، أو متعددة المقاييس، أو مقيدة ديناميكياً، يتم تقييمها بناءً على سلوك التدفق الطيفي.

الكلمات المفتاحية: الاضطراب؛ محاكاة الدوامات الكبيرة LES؛ فضاءات بيسوف؛ تدفق الطاقة تحت الشبكي؛ الإغلاقات المحلية.



حقوق النشر : مجلة جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً) - سوريا، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب

الترخيص CC BY-NC-SA 04

*مدرس، الجامعة السورية الخاصة (SPU) - سورية. rose.moh.438@gmail.com

مقدمة:

تعد محاكاة الدوامات الكبيرة LES إطاراً أساسياً لدراسة الجريانات المضطربة ذات أعداد رينولدز الكبيرة؛ إذ تُحل المقاييس الكبيرة مباشرة، بينما يُنمذج أثر المقاييس الأصغر من عرض المرشح. وتظهر مسألة الإغلاق لأن إجهاد تحت الشبكة scale stress, SGS stress-subgrid لا يستعاد من الحقل المصفى وحده من دون فرضيات إضافية حول تأثير المقاييس غير المحلولة [1-3].

تزداد صعوبة المسألة قرب عتبة أونساغر الحرجة، حيث لا يكفي انتظام من رتبة (1/3) لضمان تلاشي تدفق الطاقة عند تصغير المقياس. عند هذه العتبة تصبح البنية القشرية للتدفق جزءاً من المسألة نفسها، ولا يكفي قياس مقدار كلي متوسط لإثبات أن النموذج يعيد تمثيل الشلال الطاقوي تمثيلاً صحيحاً [4-7,9].

تعالج هذه الدراسة قصور فئة محددة من الإغلاقات، هي الإغلاقات التفاضلية المحلية محدودة الرتبة التي تعتمد على عدد منته من مشتقات الحقل المصفى عند النقطة ذاتها. ولا يهدف البحث إلى رفض النماذج المحلية بوصفها أدوات عملية، بل إلى تحديد المجال الذي يصبح فيه اعتمادها على معلومات موضعية منتهية غير كافٍ لتمثيل الذاكرة الطيفية الناتجة عن التفاعلات الثلاثية بين القشور [10,12].

أنجزت هذه الدراسة بوصفها عملاً نظرياً وحسابياً قليلاً خلال عام 2026 على المجال الدوري ثلاثي الأبعاد، ولا تعتمد على قياسات مخبرية أو حقول DNS جديدة. الغرض من الحساب العددي هو اختبار معيار طيفي مضبوط وقابل للتكرار، لا تقديم حملة تحقق LES/DNS نهائية.

أهمية البحث وأهدافه :**حدود الإضافة العلمية**

- تحديد فئة الإغلاقات المحلية محدودة الرتبة بدقة، وربطها مباشرة بتدفق نموذجي قابل للمقارنة مع التدفق الحقيقي المصفى. [11-12,10-3]
- توضيح العلاقة بين الانتظام الحرج في فضاءات بيسوف وبنية التدفق الطيفي في LES، من غير تعميم الاستنتاجات خارج الفرضيات المعتمدة [4-7,9].
- استخدام تفكيك ليتلود-بالي وتحليل بوني لتنظيم مساهمات التفاعل الثلاثي وبيان حدود الاختزال المحلي المنتهى. [7,8]
- تصحيح الاختبار القبلي القشري حسابياً بحيث تتطابق نتائج الجدول مع الصيغ المعلنة، وتثبت $j = 1, \dots, 20$ و $\delta = 10^{-12}$ صراحة.
- التمييز بين الاستدلال التحليلي المقيد والدليل العددي الأولي، مع تجنب تقديم الاختبار القبلي بوصفه تحققاً DNS/LES نهائياً.

طرائق البحث و موادّه:

يصاغ التحليل على المجال الدوري ثلاثي الأبعاد $\mathbb{T}^3$. هذا الاختيار يزيل أثر الحدود والجدران ويسمح باستعمال أدوات فورييه وتفكيك ليتلود-بالي مباشرة. لذلك تظل النتائج الآتية مقيدة بهذا الإطار، ولا تنقل مباشرة إلى الجريانات ذات الجدران أو الطبقات الحدية من غير فرضيات إضافية [13].

الجدول 1. الرموز الأساسية المستخدمة في الدراسة.

الرموز	التعريف	دوره في التحليل
$\mathbb{T}^3$	المجال الدوري ثلاثي الأبعاد	يعزل أثر الحدود ويسمح بتحليل فورييه
u	حقل السرعة غير القابل للانضغاط	الحقل المرجعي قبل التصفية، مع $\nabla \cdot u = 0$
ℓ	عرض المرشح	مقياس الفصل بين المقاييس المحلولة وغير المحلولة
G_ℓ, u_ℓ	المرشح والحقل المصفى	يحددان المتغير المحلول الذي تدخل عليه الإغلاقات
$\tau_\ell(u, u)$	إجهاد تحت الشبكة الحقيقي	يمثل أثر المقاييس غير المحلولة بعد التصفية
$\Pi_\ell(u)$	تدفق الطاقة المصفى	الكمية المرجعية التي يقارن بها النموذج
$\Pi_{\{\ell, j\}}, P_\ell$	مركبات التدفق القشرية ومتجهها	تستخدم لمقارنة البنية الطيفية لا المتوسط فقط
S_j, Δ_j	إسقاطات ليتلود-بالي والقاطع منخفض التردد	تفصل مساهمات القشور الطيفية
$J_x^M u_\ell$	الجت المحلي للحقل حتى الرتبة M عند x	المعلومة الوحيدة المسموح للإغلاق المحلي باستخدامها
$C_\ell^M(u_\ell)$	إغلاق محلي محدود الرتبة	يولد إجهاداً نموذجياً ومنه تدفقاً نموذجياً
$\delta, \rho_{\text{spec}}$	ثابت صغير ، معامل الارتباط الطيفي	يستخدمان في قياس الخطأ القشري والارتباط

1. فضاء بيسوف الحرج:

يُقال إن حقل السرعة ينتمي إلى فضاء بيسوف الحرج إذا كان معيار بيسوف الآتي منتهياً: [4-7,9]

$$\|u\|_{B_{3,\infty}^{1/3}}^{1/3} = \sup_{j \geq -1} 2^{j/3} \|\Delta_j u\|_{L^3(\mathbb{T}^3)} < \infty \quad (1)$$

تكمُن أهمية هذا الفضاء في أن الأس (1/3) يمثل الحد الذي لا يضمن، وحده، تلاشي تدفق الطاقة عند تصغير المقياس. ومن ثم فإن أي مقارنة بين التدفق الحقيقي وتدفق النموذج يجب أن تحدد طوبولوجيا المقارنة، وألا تكتفي بتقدير متوسط كلي غير قشري [4-7].

2. التصفية، وإجهاد تحت الشبكة، والتدفق الحقيقي:

يُعرف الحقل المصفى باستعمال مرشح ناعم G_ℓ وفق العلاقة [1-3]:

$$u_\ell = G_\ell * u, \quad G_\ell(x) = \ell^{-3} G\left(\frac{x}{\ell}\right), \quad \int_{\mathbb{T}^3} G(x) dx = 1 \quad (2)$$

ويُعرف إجهاد تحت الشبكة الحقيقي بالصيغة [1-9,3]:

$$\tau_\ell(u, u) = (u \otimes u)_\ell - u_\ell \otimes u_\ell \quad (3)$$

أما تدفق الطاقة المصفى، وهو الكمية المرجعية في هذه الدراسة، فيكتب على المجال الدوري كما يأتي [9]:

$$\Pi_\ell(u) = -\int_{\mathbb{T}^3} \tau_\ell(u, u) : \nabla u_\ell dx \quad (4)$$

في هذه الصيغة يشير الرمز : إلى الانقباض المزدوج بين التنتسورات. وهذا التعريف يربط الإطار الرياضي بمسألة LES مباشرة: فالهدف ليس تقدير إجهاد مجرد، بل تقدير الأثر الطاقي الذي يمارسه هذا الإجهاد على الحقل المحلول [9, 3-1].

3. الإغلاق المحلي محدود الرتبة وربطه بالتدفق النموذجي:

تُعرف فئة الإغلاقات المحلية محدودة الرتبة من خلال اعتمادها الحصري على الجت " finite local jet " المحلي المنتهي للحقل المصفى، نكتب $|\alpha|$ دليلاً متعدداً و $|\alpha|$ المصفى إذا كان [12,6,7]:

$$J_x^M u_\ell = \left\{ \partial^\alpha u_\ell(x) : 0 \leq |\alpha| \leq M \right\} \quad (5)$$

وعليه يكون الإغلاق المحلي من الرتبة M مؤثراً من الشكل:

$$C_\ell^M [u_\ell] (x) = F_M \left(\ell, x, J_x^M u_\ell \right) \quad (6)$$

ولتجنب قوة ادعاء غير مبررة، نفترض فقط أن F_M مؤثر محدد جيداً على الحقول المنتظمة المصفاة، وأنه محلي في x ولا يستخدم معاملات قشرية بعيدة صراحة. ولا نفترض الدراسة شكلاً عالمياً محدداً لهذا المؤثر، لأن الهدف هو فحص قيد المعلومات المحلية المنتهية لا معايير نموذج بعينه [10-12].

يربط الإغلاق بالتدفق النموذجي مباشرة وفق:

$$\Pi_{\ell}^{\{C,M\}}(u) = - \int_{\mathbb{T}^3} C_{\ell}^M(u_{\ell}) : \nabla u_{\ell} dx \quad (7)$$

3-4. تفكيك ليتلود-بالي وتحليل بوني:

لتكن Δ_j إسقاطاً طيفياً على القشرة الثنائية ذات الترددات من رتبة j^2 ، وليكن S_j القاطع منخفض التردد. عندئذ نكتب [7,8]:

$$u = \sum_{j \geq -1} \Delta_j u, \quad S_j u = \sum_{q < j} \Delta_q u \quad (8)$$

ونفكك جداءات الحقول وفق تحليل بوني إلى:

$$f_g = T_f g + T_g f + R(f, g) \quad (9)$$

$$T_f g = \sum_j S_{j-1} - f \Delta_j g, \quad R(f, g) = \sum_{|j-k| \leq 1} \Delta_j f \Delta_k g \quad (10)$$

المعنى التحليلي لهذه الصيغة أن النقل الطاقى يتألف من تفاعلات منخفضة-عال، وعال-منخفض، وعال-عال. وهذه الأنماط لا تختزل عموماً في عدد منتهٍ من المشتقات الموضعية، لأن جزءاً من أثرها يتحدد بتوزع القشور وبترباطها. [7,8]

5. البناء القشري الحرج:

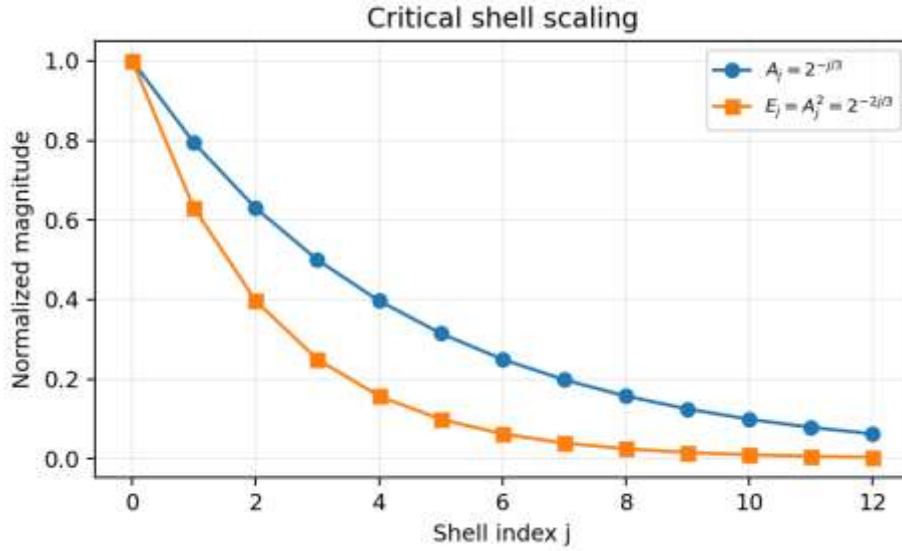
لتحليل الحالة الحرجة نستخدم عائلة حقول قشرية من الشكل [4-7,9]:

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^N w_j(x), \quad w_j(x) = 2^{-j/3} a_j e^{ik_j x}, \quad a_j \cdot k_j = 0 \quad (11)$$

تُختار المتجهات k_j بحيث تتوضع كل مركبة داخل قشرة محددة مع تراكب محدود، ويمثل i الوحدة التخيلية. ويترتب على ذلك التقدير [4-7,9]:

$$\|u_N\|_{B_{3,\infty}^{1/3}}^{1/3} \leq C \sup_{1 \leq j \leq N} |a_j| \quad (12)$$

الثابت C في المعادلة السابقة مستقل عن رقم القشرة j وعدد القشور N ضمن العائلة المختارة. ويبين الشكل الآتي توزيع السعات والطاقة الشكلية في هذا البناء القشري. وهو رسم تحليلي مساعد يوضح التحجيم، وليس نتيجة DNS [4-7,9].



الشكل 1. التحجيم الحرج للقشرة: السعة A_j والطاقة الشكلية E_j .

يوضح الشكل قانون التحجيم المستخدم في البناء القشري.

3. مقاييس الاختبار القشري القابلة للتكرار:

حتى تكون المقارنة قابلة للتكرار، نرمز إلى متجه التدفق القشري الحقيقي بالرمز $P_\ell(u)$ ، وإلى متجه التدفق الناتج عن الإغلاق المحلي بالرمز $P_\ell^{C,M}(u)$ ولا تصاغ الدراسة هنا كبرهان حد أدنى موجب مستقل لكل الإغلاقات، بل كمعيار تشخيصي يقيس مقدار الفجوة القشرية: [9,12-7]

$$D_M(\ell; u) = \frac{\|P_\ell(u) - P_\ell^{C,M}(u)\|_2}{\|P_\ell(u)\|_2 + \delta} \quad (13)$$

تستخدم هذه الصيغة بوصفها أداة قياس. فإذا بقيت مساهمات بوني بين قشور غير متجاورة مؤثرة، فإن ارتفاع D_M أو انخفاض الارتباط الطيفي يفسر بوصفه علامة على أن الجت المحلي المنتهي لا يحمل معلومات كافية لإعادة بناء الخريطة القشرية للتدفق، ضمن الفرضيات المعلنة فقط [9-7].

النتائج والمناقشة:

1. الاستدلال التحليلي المقيد:

تتعلق المقارنة بطبيعتين مختلفتين للمعلومة. فالتدفق الحقيقي $\Pi_\ell(u)$ يتضمن أثر $\tau_\ell(u, u)$ وهو مقدار يولد من ترابطات المقاييس غير المحلولة. $\Pi_\ell^{C,M}(u)$ ، فيحدد من معلومات موضعية منتهية عن u_ℓ وعندما تبقى مساهمات التفاعل الثلاثي بين قشور متباعدة مؤثرة، لا يكون للجت المحلي المنتهي، من حيث المبدأ التشخيصي، درجة حرية كافية لإعادة بناء كامل الخريطة القشرية للتدفق [7-9].

لذلك لا تستخدم الدراسة عبارة «مبرهنة استحالة» ولا تدعي أن جميع نماذج LES المحلية تفشل. النتيجة المقيدة هي أن معيار المتوسط الكلي قد يكون غير حساس للفجوة الطيفية، وأن تقييم الإغلاق يجب أن يضم مقاييس قشرية مثل D_M و ρ_{spec} إلى جانب المتوسط العام [16-7,9,14].

2. تحقق قبلي عددي مباشر:

يعرف متجه تدفق مرجعي قشرياً Π_j^{exact} يمثل التدفق المحسوب بعد التصفية، ثم يقارن مع تدفقين نموذجيين يمثلان إغلاقين محليين من الرتبين $M = 2$ و $M = 4$. استخدمت الصيغ الآتية لغرض الاختبار القشري المضبوط، مع $j = 1, \dots, 20$ و $\delta = 10^{-12}$ ، وجميع الزوايا بالراديان [12]:

$$\Pi_j^{\{\text{exact}\}} = 1 + 0.04 \sin(2\pi j/7) + 0.02 \cos(\pi j/5), \quad j = 1, \dots, 20 \quad (14)$$

$$\Pi_j^{\{M=2\}} = 1 - 0.32 e^{\{-j/4\}} + 0.06 \sin(2\pi j/8) \quad (15)$$

$$\Pi_j^{\{M=4\}} = 1 - 0.22 e^{\{-j/6\}} + 0.12 \sin(\pi j/5) \quad (16)$$

لا تمثل هذه الصيغ بيانات DNS، بل تحققاً عددياً قليلاً مضبوطاً يختبر حساسية البنية القشرية للخطأ حتى عندما يكون متوسط التدفق قريباً نسبياً. أعيد حساب الجدول من هذه الصيغ مباشرة لتجنب أي عدم اتساق عددي. استخدمت المقاييس الآتية:

$$E_{\text{mean}}^{(M)} = \frac{|\text{mean}(\Pi^{\text{exact}}) - \text{mean}(\Pi^M)|}{|\text{mean}(\Pi^{\text{exact}})| + \delta} \quad (17)$$

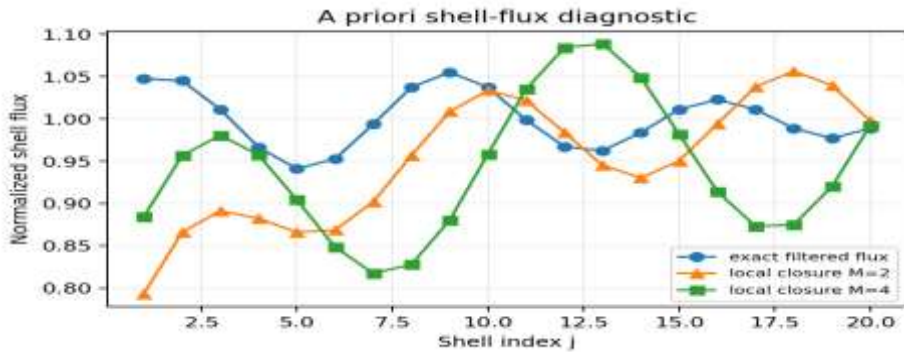
$$E_j^{\text{rel}} = \frac{|\Pi_j^{\text{exact}} - \Pi_j^M|}{|\Pi_j^{\text{exact}}| + \delta}, \quad E_{\text{rel}}^{(M)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E_j^{\text{rel}} \quad (18)$$

$$E_{\text{max}} = \max_j E_j^{\{\text{rel}\}}, \quad \rho_{\text{spec}}(M) = \text{corr}((\Pi_j^{\{\text{exact}\}})_{\{j=1\}}^{\{N\}}, (\Pi_j^M)_{\{j=1\}}^{\{N\}}) \quad (19)$$

الجدول 2. نتائج الاختبار القبلي القشري المصححة على 20 قشرة، باستخدام $j=1, \dots, 20$ و $\delta=10^{-12}$.

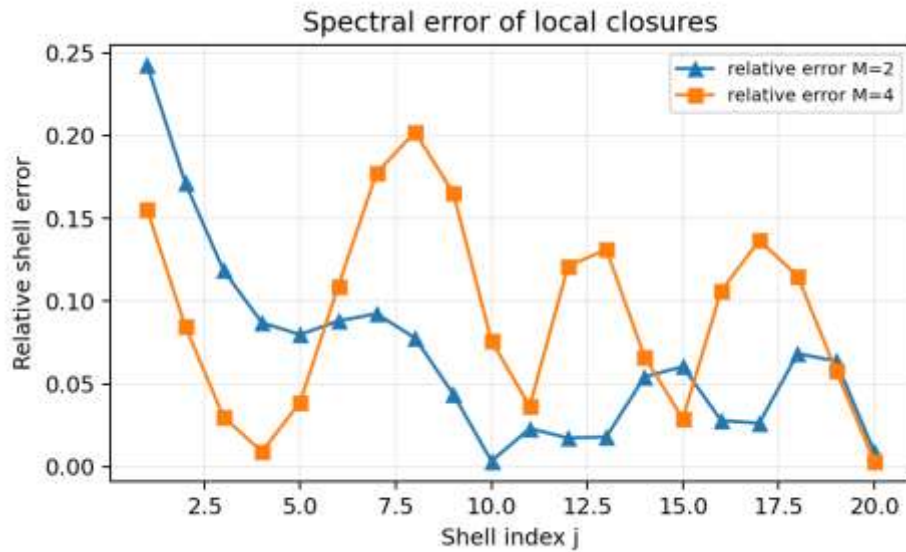
النموذج	خطأ المتوسط الكلي	متوسط الخط القشري	أكبر خطأ قشري	الارتباط الطيفي
إغلاق محلي $M = 2$	4.87%	6.88%	24.27%	+0.077
إغلاق محلي $M = 4$	5.85%	9.27%	20.20%	-0.273

تبين القيم المصححة أن خطأ المتوسط الكلي يبقى محدوداً نسبياً في النموذجين، إلا أن الخطأ القشري والارتباط الطيفي يقدمان صورة أكثر دقة. فالإغلاق $M = 2$ يعطي متوسط خطأ قشري أصغر نسبياً من أكبر خطأ له، لكنه لا يتتبع البصمة الطيفية إلا بارتباط ضعيف موجب. أما الإغلاق $M = 4$ فيحسن أكبر خطأ قشري قليلاً، لكنه يعطي متوسط خطأ قشري أعلى وارتباطاً طيفياً سالباً في هذا الاختبار المصطنع. وهذا يؤكد أن رفع الرتبة المنتهية لا يضمن وحده تحسين السلوك القشري.



الشكل 2. مقارنة قبلية مباشرة بين التدفق المرجعي المصفي وتدفق إغلاقين محليين.

يوضح الشكل أن التقارب في المتوسط لا يعني بالضرورة تطابقاً قشرياً.

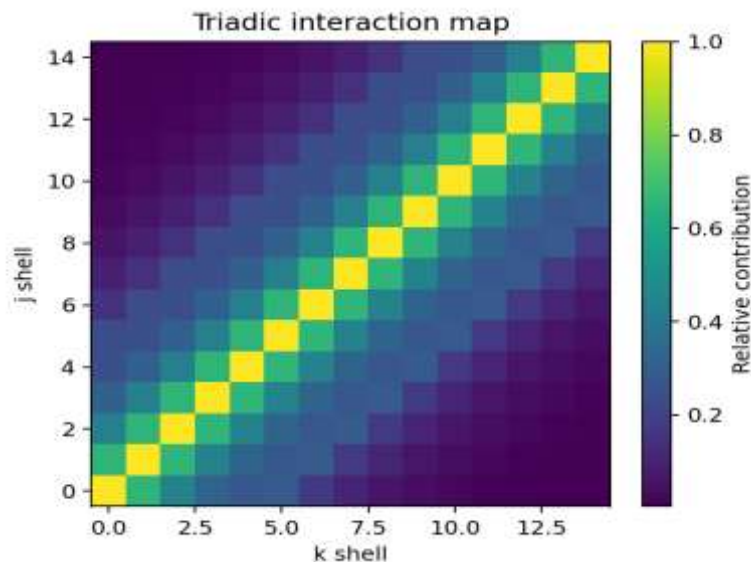


الشكل 3. الخطأ القشري النسبي للإغلاقات المحليين.

يظهر الخطأ بوضوح في القشور المنخفضة والمتوسطة، وهي مناطق لا يكشفها متوسط التدفق وحده.

3. خريطة التفاعلات الثلاثية:

لربط الاختبار العددي بتحليل بوني، يوضح الشكل الآتي خريطة تخطيطية لمساهمات التفاعل بين القشور. المنطقة القريبة من القطر تمثل التفاعلات القريبة، بينما تمثل الامتدادات خارج القطر مساهمات غير محلية نسبياً. وعندما تبقى هذه الامتدادات مؤثرة، يصعب على إغلاق محلي محدود الرتبة أن يستعيدها من الجت المحلي وحده [7,8].



الشكل 4. خريطة تفاعلات ثلاثية بين القشور.

الشكل تخطيطي تحليلي يبين مواضع المساهمات القريبة والبعيدة، ويرتبط بتفسير تحليل بوني ولا يدعي أنه نتيجة DNS.

4. مناقشة عامة:

تظهر النتائج ثلاث دلالات رئيسية:

أولاً، إن تعريف الإغلاق المحلي لا يكتمل إلا عند ربطه بتدفق نموذجي قابل للمقارنة مع التدفق الحقيقي. ثانياً، يوضح تحليل بوني أن التفاعل الثلاثي قد يحمل مساهمات تتجاوز ما يمكن تمثيله بمشتقات موضعية منتهية. ثالثاً، يبين الاختبار القبلي أن معيار المتوسط وحده قد يخفي خطأ قسرياً مهماً، ولذلك ينبغي تقييم نماذج LES من خلال البنية الطيفية للتدفق لا من خلال المتوسطات الكلية فقط [18-7,8,11,14]. من الناحية الفيزيائية، تعني هذه النتيجة أن جزءاً من الشلال الطاقى يحمل ذاكرة طيفية لا تختزل دائماً في معدل التشوه أو في مشتقات محلية محدودة. ولهذا فإن النماذج غير المحلية أو متعددة المقاييس أو الديناميكية ليست تحسينات شكلية، بل خيارات مبررة عندما يكون الهدف تمثيل التدفق الطيفي لا مجرد ضبط الطاقة الكلية [18-11,14].

5. حدود الدراسة:

- التحقق العددي اختبار قبلي قشري مضبوط، وليس حملة DNS/LES نهائية. وهو يهدف إلى تقوية الحجة وإظهار قابلية الفحص، لا إلى إنهاء مسألة التحقق التطبيقي.
- الاستدلال المركزي مقيد بفئة الإغلاقات التفاضلية المحلية محدودة الرتبة كما عرفت في المعادلات (5)–(7) [12-10].
- لا تقدم الدراسة برهاناً عاماً لحد أدنى موجب مستقل $\varepsilon_M > 0$ لكل الإغلاقات المحلية، بل تستخدم معيار D_M و ρ_{spec} لتشخيص الفجوة القشرية.
- الصياغة مبنية على المجال الدوري $\mathbb{T}^3$ ، ولذلك لا تنقل مباشرة إلى الجريانات ذات الجدران أو الطبقات الحدية من غير فرضيات إضافية [13].
- لا تنفي الورقة نجاح الإغلاقات المحلية في تطبيقات عملية كثيرة، بل تحدد قصورها عندما يكون معيار التقييم هو البنية القشرية الكاملة للتدفق الحرج.
- الخطوة اللاحقة الضرورية هي تطبيق بروتوكول الاختبار نفسه على حقول DNS أو LES عالية الدقة، ومقارنة نماذج محلية وغير محلية وديناميكية ضمن الشروط نفسها.

الاستنتاجات والتوصيات:

- يبين التحليل أن تقييم الإغلاق المحلي محدود الرتبة يجب أن يتم على مستوى التدفق القشري، لا على مستوى المتوسط الكلي وحده [7,9,12].
- إن ربط الجت المحلي المنتهي بالتدفق النموذجي يوضح حدود المعلومات التي يحملها الإغلاق المحلي مقارنة بالتدفق الحقيقي المصفى [12-3,10-1].
- يقدم تحليل بوني تفسيراً رياضياً لعدم كفاية الجت المحلي المنتهي عندما تبقى مساهمات ثلاثية بين قشور غير متجاورة مؤثرة في طوبولوجيا التدفق [7,8].
- أظهر الاختبار القبلي العددي المصحح أن مطابقة المتوسط لا تكفي لتقييم الإغلاق، لأن الخطأ القشري والارتباط الطيفي قد يكشفان فجوة بنيوية غير ظاهرة في المتوسط.

- توصي الدراسة بأن تعتمد تقييمات LES اللاحقة على مقاييس قشرية، مثل الخطأ القشري النسبي، ومعامل الارتباط الطيفي، وخريطة مساهمات التفاعل الثلاثي [7,9,12].
- توصي الدراسة بتطوير إغلاقات متعددة المقاييس وغير محلية وديناميكية، مع اختبارها لاحقاً على بيانات DNS/LES عالية الدقة [18-11,14].

References:

- [1] S. B. Pope, Turbulent Flows. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [2] P. Sagaut, Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction, 3rd ed. Berlin: Springer, 2006.
- [3] M. Lesieur, O. Métais, and P. Comte, Large-Eddy Simulations of Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. doi: 10.1017/CBO9780511755507.
- [4] L. Onsager, "Statistical Hydrodynamics," Il Nuovo Cimento, vol. 6, Suppl. 2, pp. 279-287, 1949. doi: 10.1007/BF02780991.
- [5] P. Constantin, W. E, and E. S. Titi, "Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's equation," Communications in Mathematical Physics, vol. 165, pp. 207-209, 1994. doi: 10.1007/BF02099744.
- [6] P. Isett, "A proof of Onsager's conjecture," Annals of Mathematics, vol. 188, no. 3, pp. 871-963, 2018. doi: 10.4007/annals.2018.188.3.4.
- [7] G. L. Eyink, "Locality of turbulent cascades," Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 207, no. 1-2, pp. 91-116, 2005. doi: 10.1016/j.physd.2005.05.018.
- [8] J.-M. Bony, "Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires," Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, vol. 14, no. 2, pp. 209-246, 1981. doi: 10.24033/asens.1404.
- [9] J. Duchon and R. Robert, "Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations," Nonlinearity, vol. 13, no. 1, pp. 249-255, 2000. doi: 10.1088/0951-7715/13/1/312.
- [10] J. Smagorinsky, "General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment," Monthly Weather Review, vol. 91, no. 3, pp. 99-164, 1963. doi: 10.1175/1520-0493(1963)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2.
- [11] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot, "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model," Physics of Fluids A, vol. 3, no. 7, pp. 1760-1765, 1991. doi: 10.1063/1.857955.
- [12] R. A. Clark, J. H. Ferziger, and W. C. Reynolds, "Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow," Journal of Fluid Mechanics, vol. 91, no. 1, pp. 1-16, 1979. doi: 10.1017/S002211207900001X.
- [13] C. Bardos and E. S. Titi, "Onsager's conjecture for the incompressible Euler equations in bounded domains," Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 228, pp. 197-207, 2018. doi: 10.1007/s00205-017-1189-x.
- [14] M. H. Silvis, R. Remmerswaal, and R. W. C. P. Verstappen, "Physical consistency of subgrid-scale models for large-eddy simulation of incompressible turbulent flows," Physics of Fluids, vol. 29, 015105, 2017. doi: 10.1063/1.4974093.
- [15] A. W. Vreman, "An eddy-viscosity subgrid-scale model for turbulent shear flow: Algebraic theory and applications," Physics of Fluids, vol. 16, no. 10, pp. 3670-3681, 2004. doi: 10.1063/1.1785131.

- [16] C. Meneveau and J. Katz, "Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 32, pp. 1-32, 2000. doi: 10.1146/annurev.fluid.32.1.1.
- [17] W. Rozema, H. J. Bae, P. Moin, and R. Verstappen, "Minimum-dissipation models for large-eddy simulation," *Physics of Fluids*, vol. 27, 085107, 2015. doi: 10.1063/1.4928700.
- [18] A. Beck, D. Flad, and C.-D. Munz, "Deep neural networks for data-driven LES closure models," *Journal of Computational Physics*, vol. 398, 108910, 2019. doi: 10.1016/j.jcp.2019.108910.