

A New Method for Solving Multi-objective Linear Programming Problems with Heptadecagonal Fuzzy Parameters

Dr. Ziad A. Kanaya* 

(Received 3 / 6 / 2026. Accepted 26 / 7 / 2026)

□ ABSTRACT □

This paper presents a solution method for treating multi-objective linear programming problems with heptadecagonal fuzzy parameters in both the objective functions and constraints. These parameters are treated as heptadecagonal fuzzy numbers. The proposed solution method is based on α – cut sets of heptadecagonal fuzzy numbers, which consist of eight levels according to the value of α in interval $[0, 1]$ as follows:

$$[0, 1] = [0, 0.125] \cup [0.125, 0.25] \cup [0.25, 0.375] \cup [0.375, 0.5] \\ \cup [0.5, 0.625] \cup [0.625, 0.75] \cup [0.75, 0.875] \cup [0.875, 1].$$

The proposed method employs a weighted problem, where weights are determined based on a characteristic problem of multi-objective linear programming problems with coefficients defined by closed intervals associated with heptadecagonal fuzzy numbers and a chosen α value. Then transformed in to an equivalent problem, by solving this problem the decision maker obtains an efficient solution that satisfies their aspirations according to the selected α value. An illustrative numerical example is also given.

Keywords: Fuzzy multi-objective linear programming, α -Cut set, Heptadecagonal fuzzy numbers, Efficient solution.

Copyright



:Latakia University Journal (formerly Tishreen) -Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

*Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Latakia University (formerly Tishreen), Latakia, Syria. z.kanaya@latakia-univ.edu.sy

طريقة جديدة لحل مسائل البرمجة الخطية المتعددة الأهداف بوسائط ضبابية سباعي عشرية

د. زياد علي قناية*

(تاريخ الإيداع 3 / 6 / 2026. قبل للنشر في 26 / 7 / 2026)

□ ملخص □

يقدم هذا البحث طريقة حل لمعالجة مسائل البرمجة الخطية المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية سباعي عشرية في دوال الهدف وفي القيود، وتعالج تلك الوسائط كأعداد ضبابية سباعي عشرية. تعتمد طريقة الحل المقترحة على α -مجموعات القطع للأعداد الضبابية السباعي عشرية والتي تتألف من ثماني مستويات وفقاً لقيمة α ضمن المجال $[0, 1]$ وذلك كالآتي:

$$[0, 1] = [0, 0.125] \cup [0.125, 0.25] \cup [0.25, 0.375] \cup [0.375, 0.5] \\ \cup [0.5, 0.625] \cup [0.625, 0.75] \cup [0.75, 0.875] \cup [0.875, 1].$$

تستخدم الطريقة المقترحة المسألة الموزونة حيث تحدد الأوزان بالاعتماد على مسألة مميزة لمسألة البرمجة الخطية المتعددة الأهداف ذات المعاملات المحددة بمجالات مغلقة تتعلق بأعداد ضبابية سباعي عشرية وبقية α ثم يتم الانتقال لمسألة مكافئة وبحلها يحصل متخذ القرار على حل فعال يلبي طموحاته وفق قيمة α التي تم اختيارها، كما تم تقديم مثال عددي لتوضيح هذه الطريقة.

الكلمات المفتاحية: البرمجة الخطية المتعددة الأهداف الضبابية، α -مجموعة القطع، الأعداد الضبابية السباعي عشرية، الحل الفعال.



حقوق النشر : مجلة جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً) - سوريا، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر

بموجب الترخيص CC BY-NC-SA 04

* أستاذ مساعد، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً)، اللاذقية، سورية.

z.kanaya@latakia-univ.edu.sy

مقدمة:

تعد مسائل البرمجة الخطية متعددة الأهداف أداة عملية وضرورية للتعامل مع القرارات المعقدة حيث تكون دوال الهدف متعددة ومتعارضة في آن معاً، كما إنها تلعب دوراً هاماً في مجالات علمية متعددة مثل: الرياضيات والاحصاء وعلوم الحاسوب والهندسة والاقتصاد وغيرها، وبالرغم من ذلك ونظراً لعوامل الغموض وعدم الدقة في المعلومات التي تساهم بتحديد معاملات دوال الهدف والقيود في العديد من المجالات الواقعية فإن التعامل مع مسائل البرمجة الخطية متعددة الأهداف التقليدية لا يعد مناسب لاتخاذ قرارات موضوعية تلئم الواقع الحقيقي، وفي هذه البيئة يتجلى دور المنطق الضبابي بالتعامل مع تلك المعاملات كوسائط ضبابية يمكن تمثيلها بالأعداد الضبابية وفق درجات انتماء ضمن المجال $[0,1]$ ، وبذلك يبرز الدور الهام والحيوي لحل مسائل البرمجة الخطية متعددة الأهداف ذات الوسائط الضبابية، والجدير بالذكر دور الباحث (Zadeh, 1965) [1] في تقديم مفهوم المجموعات الضبابية كتعميم للمجموعات التقليدية.

هناك العديد من الأبحاث التي تعالج مسائل البرمجة الخطية المتعددة الأهداف الضبابية، فبعضها يهتم بالجانب التطبيقي لمجالات علمية تحتاج مسائل من هذا النوع، ونذكر على سبيل تطبيق متعلق بالتخطيط وإدارة الإنتاج قدم من قبل (Wang and Liang, 2004) [2] وتناول دراسة لتطوير نموذج برمجة خطية متعددة الأهداف الضبابية لحل مسألة اتخاذ القرار في تخطيط الإنتاج الإجمالي في بيئة ضبابية حيث دوال الهدف تتمثل في تقليل إجمالي تكاليف الإنتاج، وتكاليف التخزين، وتكاليف الطلبات المتأخرة، ومعدلات التغير في مستويات العمالة. إن الكثير من الأبحاث المتعلقة بمسائل البرمجة الخطية متعددة الأهداف الضبابية تستخدم الأعداد الضبابية المثلثية أو الأعداد الضبابية شبه المنحرفة، فقد قدم (Zeng, 2010 وآخرون) [3] اقتراح نموذج البرمجة الخطية متعددة الأهداف باستخدام الأعداد الضبابية المثلثية لتطبيقها في إدارة المياه الزراعية. وحديثاً تم دراسة منهج شامل لحل مسائل البرمجة الخطية متعددة الأهداف الضبابية في ظل عدم اليقين باستخدام الأعداد الضبابية شبه المنحرفة وذلك من قبل (Shrivastava, 2025 وآخرون) [4].

أهمية البحث وأهدافه:

تتجلى أهمية البحث في التقنيات المستخدمة لحل مسائل البرمجة الخطية المتعددة الأهداف الضبابية، بالإضافة للجوانب التطبيقية المتعلقة بهذه المسائل، وهذا البحث يستخدم أعداد ضبابية سباعي عشرية في مسائل البرمجة الخطية متعددة الأهداف الضبابية وهي المرة الأولى التي يتم استخدامها على مسائل متعددة الأهداف، مما يتيح دراسة الحالات التي يكون فيها عدم اليقين موزعاً على 17 نقطة مختلفة وبالتالي تمثيل أكثر واقعية للمسائل التطبيقية، ويمكن تلخيص أهداف البحث في النقاط الآتية:

- استخدام أعداد ضبابية سباعي عشرية في المسائل الخطية متعددة الأهداف.
- تقديم طريقة لحل مسائل البرمجة الخطية متعددة الأهداف الضبابية بالاعتماد على مفهوم α -مجموعة القطع للأعداد الضبابية السباعي عشرية والحصول على حل فعال يلبي متطلبات متخذ القرار.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد هذه الدراسة على المفاهيم الأساسية كمفهوم العدد الضبابي السباعي عشري، ومفهوم α -مجموعة القطع لعدد ضبابي سباعي عشري، بالإضافة للصياغات الرياضية المناسبة للمسألة المدروسة وتعريف الحل الفعّال وطرائق تبسيط المسألة المدروسة من خلال الانتقال لمسائل فرعية متدرجة حتى نحصل على الحل الفعّال.

مفاهيم أساسية:

بمفهوم المجموعات الضبابية لا بد من التعامل مع دالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ التي تأخذ قيمها ضمن المجال $[0,1]$ وبذلك تحدد درجة انتماء العنصر x الى المجموعة $\tilde{A}$ ، ونهتم ضمن مسائل البرمجة الخطية الضبابية بدوال انتماء تعرف بعدة قطع خطية، فتحدد أشكال هندسية تتمثل في طبيعة العدد الضبابي مثل العدد الضبابي المثلي والعدد الضبابي شبه المنحرف (Bector and Chandra, 2005) [5].

تعريف 1: (العدد الضبابي السباعي عشري) [6]

يعرّف العدد الضبابي السباعي عشري $\tilde{A}$ بسبعة عشر عدداً حقيقياً مرتباً تصاعدياً $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ ونكتب $\tilde{A} = (a_1, a_2, \dots, a_{17})$ ودالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ هي مستمرة من R على المجال المغلق $[0,1]$ ، وتكون كالآتي:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{x-a_i}{a_{i+1}-a_i} \right) & \text{if } a_i \leq x \leq a_{i+1}; i = 1, 2, \dots, 8 \\ \frac{17-i}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{x-a_i}{a_{i+1}-a_i} \right) & \text{if } a_i \leq x \leq a_{i+1}; i = 9, 10, \dots, 16 \end{cases}$$

تعريف 2: (α -مجموعة القطع) [5]

لتكن $\tilde{A}$ مجموعة ضبابية في مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن $\alpha \in [0,1]$ تعرف α -مجموعة القطع للمجموعة $\tilde{A}$ كالآتي:

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in R : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

تعريف 3: (α -مجموعة القطع لعدد ضبابي سباعي عشري) [6]

تعرف α -مجموعة القطع لعدد ضبابي سباعي عشري $\tilde{A} = (a_1, a_2, \dots, a_{17})$ وفق قيمة α بثمان مجالات مغلقة هي كالآتي:

$$I_q(\tilde{A}) = [8\alpha(a_{q+1} - a_q) + qa_q - (q-1)a_{q+1}, -8\alpha(a_{18-q} - a_{17-q}) + qa_{18-q} - (q-1)a_{17-q}]$$

حيث:

$$\alpha \in [0.125(q-1), 0.125q]; q = 1, 2, \dots, 8$$

تعريف 4: (عملية الطرح للأعداد الضبابية السباعي عشرية) [6]

ليكن $\tilde{A} = (a_1, a_2, \dots, a_{17}), \tilde{B} = (b_1, b_2, \dots, b_{17})$ عندئذ:

$$\tilde{A} - \tilde{B} = (a_1 - b_{17}, a_2 - b_{16}, \dots, a_{17} - b_1)$$

النتائج والمناقشة:

ندرس في هذا البحث مسألة البرمجة الخطية المتعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية سباعي عشرية في دوال الهدف وفي القيود، ويمكن كتابة تلك المسألة وفق الصياغة الآتية $(FMOLP_{HdF})$:

$$\begin{aligned}
 \max \tilde{z}_1 &= \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{1,j} x_j \\
 \max \tilde{z}_2 &= \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{2,j} x_j \\
 &\vdots \\
 \max \tilde{z}_k &= \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{k,j} x_j \\
 &\text{subject to} \\
 \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{i,j} x_j &\leq \tilde{b}_i, \forall i = 1, 2, \dots, m \\
 x_j &\geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

حيث جميع الوسائط أعداد ضبابية سباعي عشرية أي أن:

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{h,j} &= (c_{h,j,1}, c_{h,j,2}, \dots, c_{h,j,17}); h = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n \\
 \tilde{a}_{i,j} &= (a_{i,j,1}, a_{i,j,2}, \dots, a_{i,j,17}); i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \\
 \tilde{b}_i &= (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,17}); i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

للتعامل مع المسألة $(FMOLP_{HdF})$ وفق مفهوم α -مجموعة القطع لعدد ضبابي سباعي عشري تؤول المسألة الى مسألة برمجة خطية متعددة الأهداف معاملاتها عبارة عن مجالات مغلقة من الأعداد الحقيقية، وتأخذ الصياغة الآتية $(\alpha - IMOLP)$:

$$\begin{aligned}
 \max z_1^\pm &= \sum_{j=1}^n I_q(\tilde{c}_{1,j}) x_j \\
 \max z_2^\pm &= \sum_{j=1}^n I_q(\tilde{c}_{2,j}) x_j \\
 &\vdots \\
 \max z_k^\pm &= \sum_{j=1}^n I_q(\tilde{c}_{k,j}) x_j \\
 &\text{subject to} \\
 \sum_{j=1}^n I_q(\tilde{a}_{i,j}) x_j &\leq I_q(\tilde{b}_i), \forall i = 1, 2, \dots, m \\
 x_j &\geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

حيث يتم تحديد قيمة q تلقائياً ($q \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$) وذلك بالاعتماد على قيمة α والتي تتألف من ثماني مستويات ضمن المجال $[0, 1]$ ، وبالتالي تتحول الوسائط الضبابية الى مجالات مغلقة تقليدية، فالرمز $I_q(\tilde{a}_{i,j})$ هو المجال المغلق المتعلق بالعدد الضبابي السباعي عشري $\tilde{a}_{i,j}$ ونحصل عليه من التعريف 3 وهكذا بالنسبة لباقي المجالات.

ويمكننا التعامل مع المسألة $(\alpha - IMOLP)$ من خلال احدى المسائل المميزة لها حيث المعاملات هي قيم حقيقية وليست مجالات، وهذه المسائل تأخذ الصياغة الآتية $(\alpha - MOLP)$:

$$\begin{aligned}
 \max \left(z_1 = \sum_{j=1}^n c_{1,j} x_j, z_2 = \sum_{j=1}^n c_{2,j} x_j, \dots, z_k = \sum_{j=1}^n c_{k,j} x_j \right) \\
 (\alpha - MOLP) \quad \text{subject to} \\
 \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \forall i = 1, 2, \dots, m \\
 x_j \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

حيث:

$$a_{i,j} \in I_q(\tilde{a}_{i,j}), c_{h,j} \in I_q(\tilde{c}_{h,j}), b_i \in I_q(\tilde{b}_i), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; h = 1, \dots, k$$

تعريف 5: (الحل الفعال للمسألة $(\alpha - MOLP)$) [7]

نقول عن النقطة x^* من منطقة الحل إنها حل فعال للمسألة $(\alpha - MOLP)$ عندما لا توجد نقطة أخرى من منطقة الحل بحيث يكون:

- $\sum_{j=1}^n c_{h,j} x_j \geq \sum_{j=1}^n c_{h,j} x_j^*$ وذلك من أجل $h = 1, \dots, k$
- $\sum_{j=1}^n c_{d,j} x_j > \sum_{j=1}^n c_{d,j} x_j^*$ من أجل قيمة واحدة على الأقل $d \in \{1, \dots, k\}$.

تعريف 6: (الحل الفعّال للمسألة $(\alpha - IMOLP)$) [7]

تكون النقطة x^* من منطقة الحل حلاً فعّالاً للمسألة $(\alpha - IMOLP)$ إذا كانت حل فعّال لإحدى المسائل المميزة $(\alpha - MOLP)$.

الطريقة المقترحة لحل المسألة $(FMOLP_{HdF})$:

الخطوة 1: يطلب من متخذ القرار تحديد قيمة α ضمن المجال $[0,1]$ وبالتالي تتحدد قيمة q التي تمثل رقم المستوى من ثماني مستويات ضمن المجال $[0,1]$.

الخطوة 2: نكتب المسألة $(FMOLP_{HdF})$ وفق الصياغة $(\alpha - IMOLP)$

الخطوة 3: نجد وزن لكل دالة هدف يراعي القيم المثالية لدوال الهدف ومعاملات هذه الدوال باتباع الخطوات الآتية:

(a) استبدال المجال بنقطة تمثل مركز المجال وذلك ضمن المسألة $(\alpha - IMOLP)$ ، فنحصل على مسألة مميزة لها، وتكون الصياغة الرياضية للمسألة المميزة كالآتي $(\alpha - MOLP)$:

$$\begin{aligned}
 (\alpha - MOLP) \quad & \max \bar{z}_1 = \sum_{j=1}^n \overline{I_q(\tilde{c}_{1,j})} x_j \\
 & \max \bar{z}_2 = \sum_{j=1}^n \overline{I_q(\tilde{c}_{2,j})} x_j \\
 & \vdots \\
 & \max \bar{z}_k = \sum_{j=1}^n \overline{I_q(\tilde{c}_{k,j})} x_j \\
 & \text{subject to} \\
 & \sum_{j=1}^n \overline{I_q(\tilde{a}_{i,j})} x_j \leq \overline{I_q(\tilde{b}_i)}, \forall i = 1, 2, \dots, m \\
 & x_j \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

حيث: $\overline{I_q(\tilde{c}_{h,j})}, \overline{I_q(\tilde{a}_{i,j})}, \overline{I_q(\tilde{b}_i)}$ تمثل نقاط المركز في كل مجال وذلك من أجل:

$$h = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, m$$

(b) ننشئ مصفوفة قطرها يمثل القيم العظمى $\bar{z}_h^*$ لكل دالة هدف حيث $h = 1, 2, \dots, k$ ، أي القيمة المثلى للدالة $\max \bar{z}_h = \sum_{j=1}^n \overline{I_q(\tilde{c}_{h,j})} x_j$ على منطقة الحل للمسألة $(\alpha - MOLP)$ ، وهذه المصفوفة كالآتي:

$$M = \begin{pmatrix} \bar{z}_1^* & \bar{z}_{1,2} & \cdots & \bar{z}_{1,k} \\ \bar{z}_{2,1} & \bar{z}_2^* & \cdots & \bar{z}_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{z}_{k,1} & \bar{z}_{k,2} & \cdots & \bar{z}_k^* \end{pmatrix}$$

حيث $\bar{Z}_{h,r}$ هي قيمة $\bar{Z}_r$ عند الحل الأمثل للدالة $\sum_{j=1}^n \bar{I}_L(\tilde{c}_{h,j}) x_j$ على منطقة الحل للمسألة $(\alpha - MOLP)$ علماً أن $(h = 1, 2, \dots, k; r = 1, 2, \dots, k; h \neq r)$.
(c) نجد وزن تابع الهدف Z_h من العلاقة الآتية:

$$w_h = \frac{|\bar{Z}_h^* - \downarrow \bar{Z}_{\cdot,h}|}{\sum_{h=1}^k |\bar{Z}_h^* - \downarrow \bar{Z}_{\cdot,h}|}; h = 1, 2, \dots, k;$$

حيث:

$\downarrow \bar{Z}_{\cdot,h}$ هي القيمة الصغرى في العمود h من المصفوفة M .

الخطوة 4: ننقل من المسألة $(\alpha - IMOLP)$ الى المسألة الموزونة $(\alpha - ILP)_w$ ذات الصياغة الآتية (مسألة برمجة خطية ومعاملاتها مجالات مغلقة):

$$\max Z^\pm = \sum_{h=1}^k \left(w_h \sum_{j=1}^n I_q(\tilde{c}_{1,j}) x_j \right)$$

$(\alpha - ILP)_w$ subject to

$$\sum_{j=1}^n I_q(\tilde{a}_{i,j}) x_j \leq I_q(\tilde{b}_i), \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n$$

الخطوة 5: نكتب صياغة مكافئة للمسألة $(\alpha - ILP)_w$ بحيث المعاملات لا تتضمن مجالات وذلك بالاعتماد على البحث المقدم من قبل (Abbasi and Khorram, 2007) [8] وبعد مراعاة طبيعة وقيود المسألة تكون المسألة المكافئة كالآتي:

$$\max Z^U = \sum_{h=1}^k \left(w_h \sum_{j=1}^n I_q^U(\tilde{c}_{1,j}) x_j \right)$$

subject to

$$\begin{aligned} (\alpha - LP)_w^U & \sum_{j=1}^n I_q^L(\tilde{a}_{i,j}) x_j < I_q^U(\tilde{b}_i) ; \forall i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n I_q^U(\tilde{a}_{i,j}) x_j - I_q^U(\tilde{b}_i) \leq \alpha(I_q^U(\tilde{b}_i) - I_q^L(\tilde{b}_i)) + \\ & + \alpha \sum_{j=1}^n (I_q^U(\tilde{a}_{i,j}) - I_q^L(\tilde{a}_{i,j})) x_j ; \forall i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

حيث: I_q^L و I_q^U هما الحد الأعلى والحد الأدنى للمجال I_q .

الخطوة 6: نجد الحل الأمثل للمسألة البرمجة الخطية التقليدية $(\alpha - LP)_w^U$ ويكون هو الحل الفعال للمسألة $(\alpha - IMOLP)$.

ملاحظة: يمكن لمتخذ القرار اختيار قيمة جديدة لـ α اذا رغب دراسة مستوى مختلف من حالة عدم اليقين.

مثال عددي:

لندرس مسألة البرمجة الخطية المتعددة الأهداف الآتية (مع وجود وسائط ضبابية سباعي عشرية في دوال الهدف والقيود):

$$\begin{aligned} \max \tilde{z}_1 &= (1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31)x_1 \\ &+ (6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38)x_2 \\ \max \tilde{z}_2 &= -(2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23)x_1 \\ &- (3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28)x_2 \\ \text{subject to} \\ (FMOLP_{HdF}) \quad & (1, 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 25, 27, 29)x_1 \\ &+ (3, 5, 6, 7, 8, 11, 14, 15, 19, 21, 24, 26, 28, 30, 32, 33, 36)x_2 \\ &\leq (6, 9, 10, 14, 16, 17, 19, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32) \\ & (1, 5, 10, 15, 20, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35)x_1 \\ &+ (4, 8, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 23, 26, 29, 30, 31, 32, 34, 36)x_2 \\ &\leq (8, 14, 21, 28, 35, 42, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 99, 100, 101, 102) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

الحل:

الخطوة 1: بفرض متخذ القرار اختار $\alpha = 0.8$ عندئذ $\alpha \in [0.75, 0.875]$ وبالتالي $q = 7$ أي ضمن المستوى السابع.

الخطوة 2: نكتب الصياغة الرياضية للمسألة $(\alpha - IMOLP)$:

$$\begin{aligned}
 & \max z_1^\pm = [11.8, 18.2]x_1 + [18.8, 25.2]x_2 \\
 & \max z_2^\pm = -[13.4, 16.6]x_1 - [12.4, 15.6]x_2 \\
 & \text{subject to} \\
 & [12.4, 16.6]x_1 + [14.4, 22.8]x_2 \leq [20.2, 25.6] \\
 & [24.8, 28.6]x_1 + [18.4, 24.8]x_2 \leq [58.8, 81.2] \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

الخطوة 3: إيجاد وزن لكل دالة هدف أي إيجاد w_1, w_2 وذلك كما يلي:

نكتب الصياغة الرياضية للمسألة المميزة $(\alpha - \overline{MOLP})$:

$$\begin{aligned}
 & \max \bar{z}_1 = 15x_1 + 22x_2 \\
 & \max \bar{z}_2 = -15x_1 - 14x_2 \\
 & \text{subject to} \\
 & 14.5x_1 + 18.6x_2 \leq 22.9 \\
 & 26.7x_1 + 21.6x_2 \leq 70 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

بتجاهل دالة الهدف الثانية في المسألة $(\alpha - \overline{MOLP})$ نحصل على الحل الأمثل $x_1 = 0, x_2 = 1.231183$

بتجاهل دالة الهدف الأولى في المسألة $(\alpha - \overline{MOLP})$ نحصل على الحل الأمثل $x_1 = 0, x_2 = 0$

وبناء عليه نجد أن المصفوفة M هي كالآتي:

$$M = \begin{pmatrix} 27.08602 & -17.2366 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه نستنتج أن: $\bar{z}_1^* = 27.08602, \downarrow \bar{z}_{,1} = 0, \bar{z}_2^* = 0, \downarrow \bar{z}_{,2} = -17.2366$ وبالتالي:

$$w_1 = 0.61, w_2 = 0.39$$

الخطوة 4: كتابة الصياغة الرياضية للمسألة الموزونة $(\alpha - ILP)_w$:

$$\begin{aligned}
 & \max Z^\pm = [0.724, 5.876]x_1 + [5.384, 10.536]x_2 \\
 & \text{subject to} \\
 & [12.4, 16.6]x_1 + [14.4, 22.8]x_2 \leq [20.2, 25.6] \\
 & [24.8, 28.6]x_1 + [18.4, 24.8]x_2 \leq [58.8, 81.2] \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

الخطوة 5: إن الصياغة الرياضية النهائية للمسألة $(\alpha - LP)_w^U$ كالآتي:

$$\begin{aligned}
 & \max Z^U = 5.876x_1 + 10.536x_2 \\
 & \text{subject to} \\
 & 12.4x_1 + 14.4x_2 < 25.6 \\
 & 24.8x_1 + 18.4x_2 < 81.2 \\
 & 13.24x_1 + 16.08x_2 \leq 29.92 \\
 & 25.56x_1 + 19.68x_2 \leq 99.12 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

الخطوة 6: نحل المسألة $(\alpha - LP)_w^U$ فنحصل على الحل الفعّال للمسألة $(\alpha - IMOLP)$ وفق $\alpha = 0.8$ ، وهو: $x_1 = 0, x_2 = 1.7777$.

الاستنتاجات والتوصيات:

قدمنا في هذا البحث طريقة جديدة لمعالجة مسائل البرمجة الخطية المتعددة الأهداف بوسائط ضبابية سباعي عشرية، وتلك الوسائط موجودة في دوال الهدف وفي القيود. في الطريقة المقدمة تم استخدام المسألة الموزونة حيث تحدد الأوزان بالاعتماد على مسألة مميزة للمسألة البرمجة الخطية المتعددة الأهداف ذات المعاملات المحددة بمجالات مغلقة تتعلق بأعداد ضبابية سباعي عشرية وفق مفهوم α -مجموعة القطع لعدد ضبابي سباعي عشري، ثم تم الانتقال لمسألة مكافئة وبحلها حصل متخذ القرار على حل فعّال يلبي طموحاته بحسب قيمة α ، وتم أيضاً توضيح الطريقة المقدمة من خلال مثال عددي. يمكن استخدام تلك الطريقة لحل المسائل الواقعية المتعلقة بنموذج برمجة خطية متعددة الأهداف مع وجود وسائط ضبابية سباعي عشرية في دوال الهدف والقيود، ويعود سبب وجود تلك الوسائط لصياغة النموذج الرياضي بحيث يتضمن تمثيل عالي الدقة وأكثر واقعية لحالات الغموض وعدم اليقين، وذلك بتوزيعها بشكل غير منتظم على 17 نقطة مختلفة.

References:

- [1] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets", *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [2] R. C. Wang and T. F. Liang, "Application of fuzzy multi-objective linear programming to aggregate production planning", *Computers & Industrial Engineering*, vol. 46, pp. 17-41, 2004.
- [3] X. Zeng, S. Kang, F. Li, L. Zhang and P. Guo, "Fuzzy multi-objective linear programming applying to crop area planning", *Agricultural Water Management*, vol. 98, pp. 134-142, 2010.
- [4] A. Shrivastava, B. Saxena, R. Bhardwaj, A. Ghosh, and S. Narayan, "Computational modelling under uncertainty: statistical mean approach to optimize fuzzy multi-objective linear programming problem with trapezoidal numbers", *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, vol. 15, pp. 5708-5716, 2025.
- [5] C. R. Bector and S. Chandra, *Fuzzy mathematical programming and fuzzy matrix games*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [6] V. Bala, J. Kumar and M. S. Kadyan, "New methods for fuzzy linear programming problem based on heptadecagonal fuzzy number", *Life Cycle Reliability and Safety Engineering*, vol. 13, pp. 25-32, 2024.
- [7] M. Allahdadi and A. Batamiz, "Generation of some methods for solving interval multi-objective linear programming models", *OPSEARCH*, vol. 58, pp. 1077-1115, 2021.
- [8] M. A. Abbasi and E. Khorram, "Linear programming problem with interval coefficients and an interpretation for its constraints", *Iranian Journal of Science & Technology, Trans. A*, vol. 31, pp. 369-390, 2007.