

"Quantization of the Magnetic Moment of a Magnetic Multipole"

Dr. Mohammad Halabi* 

(Received 21 / 5 / 2026. Accepted 13 / 7 / 2026)

□ ABSTRACT □

Based on the electric multipole theory, which has been extensively studied in electrostatics, and by exploiting the symmetry in the vacuum field effects of electric and magnetic fields in Maxwell's equations, this work presents a comprehensive classical study of magnetic multipole moments.

We first define the magnetic monopole according to the Dirac–Schwinger quantization condition, and then extend the analysis to include quantum effects from the perspective of quantum mechanics principles. To carry out this study, we employ the generating function method for spherical harmonics (Legendre functions).

It is shown, through the expansion of the generating function, that the terms of the series correspond to multipole moments: the constant term represents the monopole, the second term the dipole, and so on.

Our results indicate that the magnetic monopole can exist in nature under the quantization condition proposed by Dirac and Schwinger. Furthermore, we find that the quantization conditions can be determined mathematically from the recurrence relations that connect different spherical harmonics of various orders, where both the functions and their derivatives are quantized. This is expressed through the dependence of the orbital and magnetic angular momentum quantum numbers (l, m) , (l, m) , (l, m) , respectively.

Keywords: Magnetic Multipole -Legendre Function-Quantization Of Magnetic Multipole-Dirac-Schwinger Quantum Condition.

Copyright



:Latakia University Journal (formerly Tishreen) -Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

* Associate Professor, Faculty of Science, Latakia University (formerly Tishreen), Al-Sham Private University, Latakia, Syria. mhd.halabi.foph.lat@aspu.edu.sy.

تكيم العزم المغناطيسي لمتعدد الأقطاب المغناطيسي

د. محمد هاني حليبي*

(تاريخ الإيداع 21 / 5 / 2026. قبل للنشر في 13 / 7 / 2026)

□ ملخص □

استناداً للنظرية الكهربائية لمتعدد الأقطاب الكهربائي والتي درست بإسهاب في التحريك الكهربائي، وباستخدام التناظر في الآثار الفراغية بين الحقول الكهربائية والحقول المغناطيسية في معادلات ماكسويل تم في هذا البحث دراسة موسعة العزوم المغناطيسية لمتعدد الأقطاب المغناطيسي كلاسيكياً، عرفنا أولاً وحيد القطب المغناطيسي وفق تكيم ديراك-شوينجر وقمنا بتمديد هذه الدراسة لتشمل الآثار الكوانتية من وجهة نظر مبادئ ميكانيك الكم. أستخدمنا لإتمام الدراسة طريقة تابع التوليد للتوافقيات الكروية (توابع ليجندر)، تبين من خلال نشر تابع التوليد ان حدود النشر تمثل عزوم متعدد الأقطاب حيث يمثل الحد الثابت وحيد القطب والحد الثاني ثنائي القطب وهكذا.... وجدنا أن أحادي القطب المغناطيسي يمكن ان يتواجد في الطبيعة تحت شرط التكيم الذي اقترحه ديراك وشوينجر. كما وجدنا ان شروط التكيم يمكن ان تتحدد رياضياً من العلاقات التكرارية التي تربط التوافقيات المختلفة لهذه التوابع من مراتب مختلفة مكّمه هي ومشتقاتها من خلال تابعة الصيغ المختلفة لـ (l, m) العزم الزاوي المداري والمغناطيسي على التوالي.

الكلمات المفتاحية: متعدد القطب المغناطيسي، توابع ليجندر، تكيم متعدد الأقطاب المغناطيسي، شرط تكيم ديراك- شوينجر.



حقوق النشر : مجلة جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً) - سوريا، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب

الترخيص 04 CC BY-NC-SA

*أستاذ مساعد، كلية العلوم، جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً)، اللاذقية، سورية. mhd.halabi.foph.lat@aspu.edu.sy

مقدمة:

يأخذ تكميم الظواهر الفيزيائية الحيز الأهم في الفيزياء المعاصرة لإن مفهوم التكميم هو تعميم للميكانيك الكلاسيكي من جهة كما ان الميكانيك الكلاسيكي فشل في تفسير ظواهر كثيرة من جهة ثانية مثل مفعول كومبتون والمفعول الكهرضوئي ومسألة استقرار الذرة وأشاع الجسم الأسود. إذا لفهم مثل هذه الظواهر لا بد من اللجوء الى مفاهيم وفرضيات لفيزياء المعاصرة التي تستند الى النظرية الكمية لتفاعل الآثار المتبادلة بين مكونات جملة فيزيائية مدروسة [1-3]. تستند الدراسة الكلاسيكية لجملة فيزيائية ما على قوانين نيوتن ومعادلات هاميلتون ولاغرانج، في حين تستند الدراسة الكوانتية على معادلة شرودنجر، ديراك ومبدأ هايزنبرك.

يدرس الميكانيك الكلاسيكي الجمل الجهرية في حين يدرس الميكانيك الكمي الجمل المجهرية وتفاعل الإشعاع مع المواد المختلفة. عند حل معادلة شرودنجر لجملة ما (الكترونات مثلاً) نستطيع إيجاد طاقة هذه الجملة بدقة جيدة وبتطبيق نظرية الاضطراب نستطيع تقرب النتائج الى الدقة التي تتطلبها التطبيقات العملية. تكون النتائج التي نحصل عليها من الدراسة الكلاسيكية مقادير مستمرة بالنسبة للإحداثيات والزمن في حين تبين الدراسة الكمية ان هذه المقادير تأخذ قيم متقطعة (مكممة). تتعلق التأثيرات المتبادلة بين مكونات جملة فيزيائية بالأبعاد بين هذه المكونات وبماهية هذه المكونات أي بطبيعة هذه المكونات (كتلة، شحنة، كتلة مغناطيسية، عزم لف ذاتي). تُدرس الجمل الفيزيائية إحصائياً حسب نوع الجسيمات جسيمات جهرية، أو مجهرية نستخدم إحصاء ماكسوي بولتزمان لدراسة الجمل الجهرية، كما نستخدم الإحصاء الكمي (فيرمي - ديراك، بوز أينشتاين)، حسب نوع الجسيمات فيرميونات أم بوزونات التي بدورها تتبع سبين الجسيم، في حال الفيرميونات يكون عزم اللف الذاتي (السبين) نصف عدد صحيح من ثابت بلانك وفي حال البوزونات يكون مساوياً عدد صحيح من ثابت بلانك. نستطيع في الدراسة الإحصائية حساب وسطي مقدار فيزيائي ما بعد معرفة نوع الجسيم أي نعرف نوع التوزع وعندها يكون وسطي مقدار ما وليكن الطاقة على سبيل المثال معطى بالصيغة الرياضية الآتية:

$$\bar{E} = \int_{E_1}^{E_2} E \cdot f(E) \cdot g(E) dE$$

حيث: $f(E)$ تابع التوزع و $g(E)$ كثافة التوزع.

يمكن دراسة الذرة كجملة متعدد الأقطاب كونها مكونة من الكترونات وبروتونات وأعطت الدراسة التحليلية [4,5] نتائج جيدة حيث تم حل معادلة شرودنجر للجملة بشكل مستقل عن الحقل الخارجي المطبق وتمكن الباحثان في [4] من تكميم الجملة والتوصل الى تكميم لاندوا المعروف في مثل هذه الجمل. في مكان آخر تم حل مسألة التكميم بإدخال مؤثرات الهدم والبناء [6]. في دراسة أخرى وهي عبارة عن رسالة ماجستير في جامعة ميونخ [7] قام الباحث بدراسة تفاعل الذرات كتقريب لثنائيات أقطاب في تفاعل الإشعاع مع المادة. من هنا تأتي أهمية دراسة الثنائيات ومتعدد الأقطاب كجملة فيزيائية مستقلة وكأنها مجموعة جسيمات أو أشياء كلاسيكية ومن ثم تناولها من وجهة نظريات الكم المعروفة. نعلم من نظرية التحريك الكهرطيسي (Electrodynamics Theory) ان معادلات ماكسويل تصف الظواهر الكلاسيكية بدقة كبيرة وذلك في غياب الشحنات المغناطيسية والكهربائية. تعطى هذه المعادلات في غياب الشحنات كما يلي:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1)$$

لهذه المعادلات تناظر رائع عند عدم وجود شحنات من أي نوع. وذلك عندما نجري التحويل الآتي:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B}, \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{E} \quad (2)$$

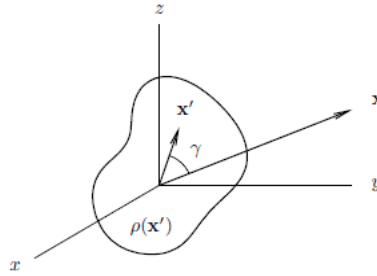
حيث تبقى هذه المعادلات بدون تغيير، أي أن الحقول الكهربائية والمغناطيسية تتصرف بنفس الطريقة، هذه الازدواجية (Duality) تبين أن خطوط الحقل المغناطيسي حول شحنة مغناطيسية (g) يجب أن تحقق علاقة مناظرة لما يحققه الحقل الكهربائي فيما يخص الصيغ الرياضية لعلاقة الحقول والقوى والكمون أي:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^3} \hat{r}, \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi r^3} \hat{r}, \quad \vec{F} = g(\vec{B} + \vec{v} \times \vec{E}) \quad (3)$$

حيث $\vec{E}, \vec{B}$ الحقلين المغناطيسي والكهربائي على التوالي. ذا افترضنا وجود شحنات هذا يعني أن هذا التناظر تم كسره ويصبح غير محقق. توصف القوى في الألكتروديناميك الكمي بواسطة كمونات سلمية وشعاعية: $\vec{A}, \emptyset$ بدلاً عن الحقول: $\vec{E}, \vec{B}$ لوحدها فقط. هذه الكمونات هي تعميم نظري ينتج من سياق النظرية الكهرطيسية. وتكتب الحقول بتابعية هذه الكمونات كما يلي:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \emptyset, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (4)$$

نستخدم جملة إحداثيات كما في الشكل الآتي لحساب الكمون والحقل المطلوب في البحث سواء كان توزع الشحنات منفصلاً أم مستمراً:



الشكل (1) جملة الإحداثيات المستخدمة في حساب الكمون والحقل الناتج عن توزع حتمي للشحنات

$\rho(x')$ الكثافة في واحدة الحجم للشحنات أو للعزوم المغناطيسية التي يتم حسابها في الموضع x [6].

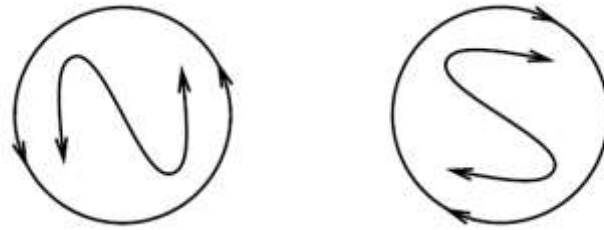
ان التعريف (4) للحقول لا يحقق التناظر الذي اشرنا اليه سابقاً في حالة وجود شحنات بالتالي فان الكمونات (4) ليست مقادير فيزيائية قابلة للملاحظة والقياس. في هذه الحالة وبالتالي يوجد عدد لا نهائي من الحلول التي تحقق الشروط (4) وبكلام آخر يوجد عدد لا نهائي من الكمونات تحقق معادلات ماكسويل [7,8]. إذا أخذنا الصيغ الآتية للكمونات (4):

$$\emptyset = \emptyset - \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \vec{A} = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda \quad (5)$$

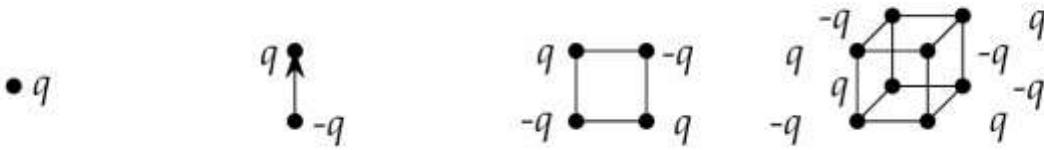
فان الكمونات لا تتغير تحت هذا التحويل مما يبين أن التوصيف (4) يحظر وجود الشحنات وهذا ينتج مباشرة من كون تفرق دوار شعاع معدوم وفق خواص الأشعة [9].

ندرس في هذا البحث جملة مكونة من مجموعة رباعيات أقطاب على أنها بنية فيزيائية مكونة من جسيمات كل منها مكون من قطبين مغناطيسيين مختلفة بالإشارة ومتساويين بالكتلة المغناطيسية. في حالة شحنة كهربائية أو مغناطيسية يكون لكمون الكهربائي (المغناطيسي) على بعد r من الشحنة متناسباً مع مقلوب البعد أي مع $\frac{1}{r}$ وهو نفس التناسب لكمون التجاذب الكوني والتجاذب المغناطيسي ويختلف هذا القانون عندما نشكل ثنائي أو باعدي قطب ويصبح تابعاً للبعد من الشكل $\frac{1}{r^k}$ حيث $k > 1$ ويتطلب إدخال تعديلاً جوهرياً على الحسابات بالرغم من أنه على أبعاد كبيرة جداً من متعدد الأقطاب يكون الحقل الناتج وبالتالي الكمون بتقريب جيد متطابق مع الكمون في حالة الشحنة الكهربائية

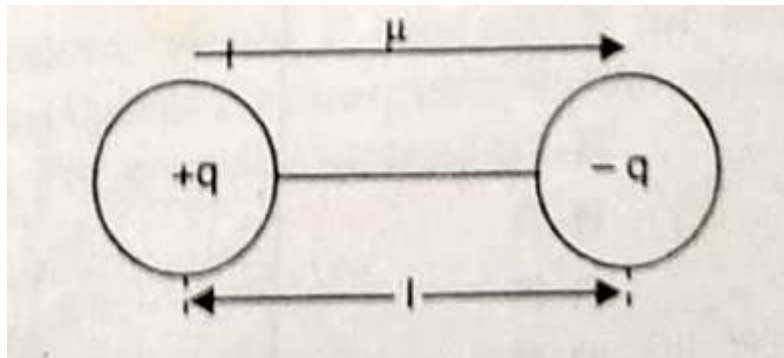
النقطية (المغناطيسية) الواحدة. تتواجد هذه البنى الفيزيائية أينما درسنا الذرة حيث يتواجد الإلكترون والبروتون أو في حالة الغازات المؤينة كما يتواجد متعدد الأقطاب على المستوى الجهري الأرض مثلاً هي ثنائي قطب كبير (جهري) أو نقول مايكروسكوبي، الإلكترون والبروتون هو ثنائي قطب ميكروسكوبي (جهري) كما تظهر هذه الجملة كثيراً في السرعات حيث يتطلب حساب الحقل المغناطيسي بدقة كبيرة بحيث يحقق معادلات ماكسويل في العمليات الرياضية والحاسوبية المتعلقة بحصر الشحنات الكهربائية [8,10]. يعرف ثنائي القطب على أنه عبارة عن شحنتين متساويتان متعاكستين بالإشارة تقعان على مسافة بينهما r ، كما يمكن النظر إلى دائرة كهربائية على أنها ثنائي قطب نظراً لجهة التيار ودوار الحقل المغناطيسي الناتج عنه (معادلة مكسويل الرابعة). كما يعرف عزم ثنائي القطب بالعلاقة الآتية: $\mu = q \times L$ في الأشكال الآتية نوضح كيفية تشكل متعدد الأقطاب من مراتب مختلفة: الشكل (2) حالة تيار دائري، الشكل (3) يمثل شحنات نقطية أو أقطاب مغناطيسية متعددة.



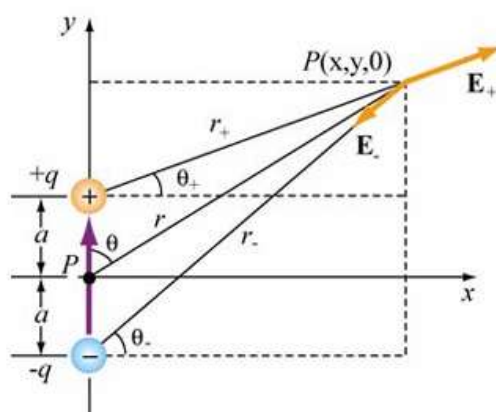
الشكل (2) دائرة تيار كهربائي تمثل ثنائي قطب حسب جهة التيار



الشكل (3). رسم تخطيطي لمتعدد الأقطاب من اليسار قطب واحد، ثنائي قطب، رباعي أقطاب، ثماني أقطاب



الشكل (4) في الشكل الآتي رسم تخطيطي لثنائي الأقطاب الكهربائي يظهر فيه البعد بين الشحنتين مساوياً $L = 2a$ كما أن مركز الثنائي ينطبق على مركز الإحداثيات.



الشكل (5) الرسم التخطيطي الذي نحسب وفقه الحقول والكمون في النقطة $P(x, y, 0)$

Electric Dipole Potential: يعرف الكمون الكهربائي لمتعدد الأقطاب بالصيغة الرياضية الآتية [11]:

$$V = \sum_i v_i = (\text{for Dipol}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (6)$$

ولكن وحسب متطابقة الضلع الثالثة في مثلث لدينا:

$$r_{\pm}^2 = r^2 + a^2 \mp 2racos\theta$$

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \mp 2 \left(\frac{a}{r} \right) cos\theta \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

بتعويض هذه الصيغة في عبارة الكمون والأخذ بعين الاعتبار الشرط $r \gg a$ نجد باستخدام منشور تايلور عبارة الكمون الآتية:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \left(\frac{a}{r} \right) cos\theta - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \left(\frac{a}{r} \right) cos\theta + \dots \right]$$

$$V \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{2a cos\theta}{r} = \frac{P cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (8)$$

يسمى المتجه $\vec{P} = 2aq\hat{r}$ عزم ثنائي القطب الكهربائي و $\hat{r}$ متجه واحدة وفق المتجه $\vec{r}$. سوف نتتبع في دراسة تكميم عزم رباعي الأقطاب المغناطيسي الطرق الرياضية نفسها التي تستخدم في دراسة متعدد الأقطاب الكهربائي، يمثل البعد بين القطبين حجر الزاوية في دراسة عزوم متعدد الأقطاب ويمثل رياضياً بالصيغة الآتية:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{r'}{r} cos\theta + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3cos^2\theta}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{5cos^3\theta}{2} - \frac{3cos\theta}{2} \right) \right] + \dots \quad (9)$$

لهذه العلاقة أهمية بالغة في حساب الكمون والحقول للقوى التي تتناسب عكساً مع مربع البعد والتي تسمى قوى التزريع العكسي ومنها قوى الجاذبية والقوى الكهربائية والمغناطيسية، وهو منشور تايلور للبعد بين شحنتين كهربائيتين أو البعد بين كتلتين مغناطيسيتين وقد يكون البعد بين كتلتين ماديتين. لهذا السبب يدخل هذا المقدار في جميع العلاقات التي تحدد القوى والكمونات. من جهة ثانية تعبر هذه الصيغة الرياضية عن ما يسمى حسابياً تابع التوليد (Generating Function) ومنه تشتق جميع التوابع الكروية التي تدرس الظواهر ذات التناظر الكروي. تنتج العلاقة (9) من نشر تابع التوليد بسلسلة تايلور حيث تمثل حدود النشر توابع ليجندر المختلفة والتي بدورها تصف الكثير من الظواهر التي لها تناظر كروي ومنها الكمون الذي ندرسه هنا أي كمون متعدد الأقطاب المغناطيسي. في هذا السياق نأخذ منشور تابع التوليد حيث تعبر حدود هذا المنشور عن توابع ليجندر الكروية من الشكل $P_l(cos\theta)$.

تتمتع هذه التوابع بخصائص تناظرية مهمة تسمى العلاقات التكرارية (Recurrences Relation)، تربط هذه العلاقات الصيغ الرياضية لتوابع ليجندر من مراتب محددة فقط وفي بعض الصيغ ترتبط توابع ليجندر مع مشتقاتها أيضاً سوف نستخدم إحدى هذه العلاقات لاستنتاج العلاقة العامة للكمون والطاقة الخاصة لرباعي الأقطاب بتابعية الدليل (4).

باستخدام العلاقة التكرارية لتوابع ليجندر الآتية:

$$(l+1)P_{l+1}(r) = (2l+1)rP_l(r) - lP_{l-1}(r) \quad (10)$$

توجد دراسة وافية وموسعة لتوابع ليجندر والعلاقات التكرارية وكذلك تابع التوليد في مرجع عالمي شهير (Arfken) ومنه أخذنا العلاقات الرياضية المستخدمة هنا لوصف متعدد الأقطاب ويوجد دراسة وافية في (Griffith, Electrodynamics) [2,3] حيث تم هناك حساب كمون ثنائي القطب الكهربائي. تنتج من هذه العلاقة التكرارية توابع ليجندر مباشرة وسوف نحدد التوابع الأربعة الأولى التي سوف نلزمنا في دراسة متعدد الأقطاب. من العلاقة (10) نجد أن:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = r, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3r^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5r^3 - 3r)$$

وبفرض $r = \cos\theta$ في الإحداثيات القطبية نستطيع كتابة العلاقة (9) السابقة بتابعية توابع ليجندر على شكل مجموع بمعامل صحيح موجب l . كما يلي:

يعطى معيار كولومب للحقل الشعاعي بمعادلة مكسويل الثالثة $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ ويعطى منشور الكمون الشعاعي وفق التوافقيات الكروية بالعلاقة الآتية [10, 13, 14].

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{lm} a_l M_{lm} \frac{Y_{lm}^l(\hat{r})}{r^{l+1}} + b_l T_{lm} \frac{Y_{lm}^{l+1}(\hat{r})}{r^{l+2}} \quad (11)$$

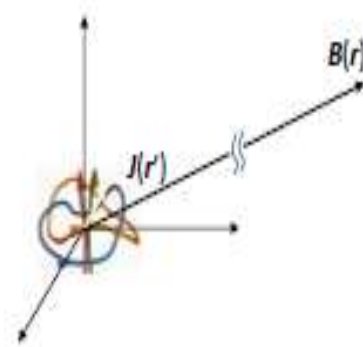
$$l \geq 1, \quad -l \leq m \leq l$$

من أجل أي تابع l r, θ تكتب التوابع الكروية التوافقية على شكل منشور في هذه المتحولات على الشكل:

$$F(r, \theta) = a_0 P_0(\cos\theta) + a_1 P_1(\cos\theta) + a_2 P_2(\cos\theta) + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(\cos\theta)$$

بأخذ اللاپلاسي لهذا التابع نجد أن:

$$\nabla^2 F(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{da_l}{dr} \right] - l(l+1) \frac{a_l}{r^2} \right\} P_l(r) \quad (12)$$



الشكل (7)

من أجل كثافة التيار المتشكل من جراء حركة الشحنات أو من تشكل محصلة عزوم مغناطيسية في التوزع حيث افترضنا ان التموضع للدائرة الكهربائية في مبدأ الإحداثيات، حسب هذا الاختيار يكون الكمون الشعاعي والحقل المغناطيسي معطيان بالعلاقات الآتية:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad r \gg r'$$

حيث $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ سماحية المغناطيسية للفراغ. $\vec{J}(\vec{r})$ كثافة التيار المحيطي في الدارة. تفيدنا هذه العلاقة المشتقة من خواص التفاضل والتوابع الكروية في دراسة لحقول الكهربائية والمغناطيسية وغيرها من مواضيع الفيزياء. وبما اننا نهتم هنا بدراسة التوابع التوافقية التي يكون فيها اللابلاسي معدوماً بسبب التناظر لذلك نأخذ من العلاقة (12) الصيغة الآتية:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{da_l}{dr} \right] - l(l+1) \frac{a_l}{r^2} = 0 \quad (13)$$

بحل هذه المعادلة نجد ان الحل يأخذ الشكل الآتي: $a_l = \text{const.} \cdot r^l$ أو $a_l = \text{const.} \cdot r^{-l-1}$ هذه الثوابت تختلف حسب قيم l . وبالتالي يمكن كتابة التابع $F(r, \theta)$ بالصيغة الآتية:

$$F(r, \theta) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} [a_l r^l + b_l r^{-l-1}] P_l(\cos \theta)$$

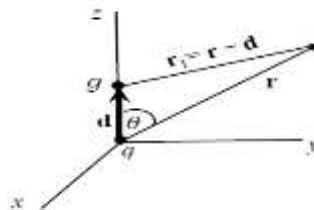
حيث: a_l, b_l ثوابت كيفية. يمكننا أن نكتب العلاقة العامة لنشر البعد بين شحنتين أو قطبين مغناطيسيين على شكل مجموع كما يلي:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad r > r' \quad (13)$$

وهي العلاقة العامة لمقلوب مسافة بين نقطتين في الفراغ، بتابعية توابع ليجندر وهي بنفس الوقت العامل الحاسم في حساب الكمون والحقل في حالة القوى المحافظة التي تتبع قانون التربيع العكسي. من هذه العلاقة نستطيع استنتاج جميع حدود العلاقة (4) ومن أية مرتبة نريد. الحد الأول يعبر عن كتلة نقطية والثاني يعطي البعد بين نقطتين والثالث الأبعاد النسبية لثلاثة كتل نقصد هنا كتل مغناطيسية أو أقطاب متعكسة كما في حالة مغناطيس مستقيم، وهكذا..... من جهة ثانية بين ديراك - شوينجر [3,7,13] شرط التكميم الخاص بالشحنة المغناطيسية بطريقة رياضية معقدة تعتمد على معادلات ماكسويل وعلى العلاقات التناظرية بين الحقول الكهربائية والمغناطيسية وتوصلا الى علاقة التكميم للشحنة المغناطيسية كما في العلاقة الآتية:

$$J_i = \frac{e}{2\pi c} \cdot \frac{n}{2} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \dots \dots (14)$$

الشكل الهندسي الذي أعتمدته ديراك - شوينجر لاستنتاج شرط تكميم الشحنة المغناطيسية انطلاقاً من التناظر في معادلات ماكسويل للحقلين الكهربائي والمغناطيسي.



الشكل (8)

لتعميم تكميم ديراك شوينجر سوف نختار المخطط الهندسي لتوضع الشحنات كما في الشكل (8) حيث
 $\cdot g \text{ magntic charge}, q \text{ electric charge}$

الشكل (8) يوضح ماهية المسافة بين كتلتين مغناطيسية g وشحنة كهربائية q هندسياً كما يوضح كيفية اختيار شعاع عزم متعدد الأقطاب في حالة حقل $\vec{E}$ وحقل قطب مغناطيسي وحيد (monopole). نحسب الحقل الكهربائي والحقل المغناطيسي الناتج عن الشحنتين في نقطة p تبعد عن المركز مسافة r يصنع r مع المحور z زاوية θ يكون كل من الحقل الكهربائي والمغناطيسي في النقطة p معطى بالعلاقات الآتية:

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{r^3} \text{ و } \vec{B}(\vec{r}) = g \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} \quad (15)$$

حسب قوانين الألكتروديناميك يشع هذا الثنائي المختلط طاقة وفق نظرية بوينتينج مساوية لـ:

$$\vec{K} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{B} \quad (16)$$

بالتعويض من (15) في (16) نحسب كثافة العزم الزاوي الكهرطيسي كما يلي:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{K} = \frac{gq}{4\pi c} \frac{\vec{r} \times [\vec{r} \times \vec{d}]}{r^3 |\vec{r} - \vec{d}|^3}, \quad \vec{r} \times \vec{r} = 0 \quad (10)$$

من الشكل الهندسي أعلاه نستبدل المقادير الشعاعية بما يكافئها أي نختار

$$\vec{r} \times \vec{d} = -r d \sin \theta \hat{\theta}, \quad \vec{r} \times [\vec{r} \times \vec{d}] = r^2 d \sin \theta \hat{\theta}$$

الرمز $\hat{\theta}$ يعني متجه الواحدة وفق المنحى أو الاتجاه θ . وفق هذه التحويلات واستخدام خواص الجداء الشعاعي وجبر المتجهات تبين لنا أن مركبة $\vec{L}$ وفق المحور $\vec{Z}$ هي المركبة الوحيدة غير المدمومة لأن الخواص التناظرية الدورانية للعزم حول المحور $\vec{Z}$ تعطي محصلة مدمومة للعزم في المستوي (XY) ، لذلك نحسب فقط هذه المركبة من العلاقة

$$\hat{z} \cdot \vec{r} \times [\vec{r} \times \vec{d}] = \hat{z} \cdot (\vec{r} [\vec{r} \cdot \vec{d}] - \vec{d} [\vec{r} \cdot \vec{r}]) = r^2 d \cos \theta^2 - r^2 d = -r^2 d \sin^2 \theta \quad (10)$$

حيث استخدمنا خاصية الجداء الشعاعي الآتية حيث وردت في العلاقات السابقة: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ يصبح العزم الزاوي الكلي:

$$\begin{aligned} \hat{z} \cdot \vec{L} &= \int d^3r \hat{z} \cdot \vec{L} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dr r^2 \frac{gq}{4\pi c r} \frac{d \sin^2 \theta}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} \\ &= \frac{gqd}{2c} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} \end{aligned}$$

بإجراء هذا التكامل خطوة خطوة حسب تسلسل المتحولات نحصل على النتيجة النهائية الآتية:

$$\hat{z} \cdot \vec{L} = \frac{qg}{c}$$

وهي نتيجة مهمة في مسألة تكميم عزم متعدد الأقطاب ينتج هذا من كون العزم الزاوي مكتم في ميكانيك الكم بوحدات من $\frac{\hbar}{2}$ حيث نستنتج مباشرة أن $\frac{qg}{c} = n \frac{\hbar}{2} \Rightarrow qg = n \frac{\hbar c}{2}, \quad n \in Z$

الاستنتاجات والتوصيات:

تم في هذا البحث استنتاج طريقة جديدة لدراسة كمية لمتعدد الأقطاب المغناطيسي حيث أستعرضنا شرط ديراك - شوينجر في تكميم الشحنات الكهربائية ومغناطيسية التي تؤدي الى امكانية وجود أحادي القطب المغناطيسي. ينتج شرط التكميم هذا من التتظر بين أثر الحقول الكهربائي والحقول المغناطيسية في معادلات مكسويل ومعيار كولومب. استخدمنا تابع التوليد لتوابع ليجندر حيث تم نشره بسلسلة تايلور . تبين لنا إمكانية الحصول على عزوم متعدد الأقطاب

المغناطيسي من حدود النشر حداً حد. تتبع هذه الحدود العاملين الكوانتيين (l,m) حيث يمثل l العدد الكوانتي المداري و (m) العدد الكوانتي المغناطيسي. تظهر هذه الأعداد الكوانتية في العلاقات التكرارية التي تربط توابع ليجندر من مراتب محددة مكممة فقط هذه العلاقة التكرارية تربط كل صيغة n مع الصيغة التي تسبقها وتليها فقط ولا ترتبط بباقي الصيغ الأخرى. نعطي بعض هذه الصيغ على سبيل المثال لأن عدد هذه الصيغ يتجاوز الثمانية منها الآتية:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

$$P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = 2xP_n'(x) + P_n(x)$$

تعتبر هذه العلاقات مع معادلة ليجندر التفاضلية تعميماً لمعادلة شرودينجر الكمية من وجهة النظر الرياضية، كما يمكن استنتاج جميع حلول معادلة شرودينجر كحالات خاصة من معادلة ليجندر. استطعنا من ربط عزوم متعدد الأقطاب (حدود منشور تابع التوليد) بالأعداد الكوانتية والتي تبين الطبيعة الكمية للعزوم تحت شوط التناظر لمعادلات مكسويل والنظرية المعيارية. الطريقة المستخدمة في هذا البحث رياضية بحتة تركز على مبادئ فيزيائية من نظرية الحقول الكمية. يمكن استخدام حدود تابع التوليد لدراسة متعدد الأقطاب من أية مرتبة نريد، كما يمكن تطبيق النتائج التي توصلنا لها هنا في دراسة العزوم المغناطيسية للذرات متعددة الألكترونات التي تتشكل فيها عزوم مغناطيسية على شكل ثنائيات أو رباعيات أو سداسيات أقطاب أو من مراتب عليا. لا يمكن حل مسألة الذرات المتعددة الإلكترونات بطريقة معادلة شرودينجر بل يجب استخدام الطرق الإحصائية الكمية في هذه الحالة. بمعرفة طاقة العزوم المغناطيسية في كل ذرة وأخذ القيمة الوسطى لهذه العزوم نستطيع حساب حدود التصحيح التي نتوجب إضافتها الى النتائج المحسوبة سابقاً، وهذا ما يتوجب القيام به في المستقبل.

References:

- [1] M. C. Chang, Department of Physics National Taiwan University, Taipei, Taiwan, lecture notes on classical electrodynamics 2022.
- [2] B.G. Arfken and H. J. Weber, Mathematical Methods For Physicists. 6th. Edition, ELSEVIER ACADEMIC PRESS. Chapter 12(2005).
- [3] D. J. Griffith, Introduction to Electrodynamics Prentice Hall, 3th. edition, chapter 3 and 5, pages 142 and 343, Especially Equation (3,72) (1999).
- [4] B.D. Cullity and C.B. Graham, Introduction to Magnetic Materials, JEEE Press, WILEY Appendix 1 page 527(2009).
- [5] I.C. Foneca and K. Bakke, Quantum effect on an atom with a magnetic quadrupole moment in a region with a time-dependent magnetic field, arXiv:quant-ph-Joao Pessoa=PB Brazil(2017).
- [6] A. Stokes, Quantum optical dipole radiation field, European journal of physics,(2016). 7 – Lea Bobmann, On the Dipole Approximation, Master Thesis, University of Munachen(2016).
- [7] A. Das, Lectures on Electromagnetism, second Edition, university of Rochestre USA, HINDUSTAN BOOK AGENCY, Chapter 9(2013).
- [8] M. Bassetti and C. Biscari, Analical Fmulate for Magnetic Multipoles, INFN, Laboratori Nazionali di Frascati, Via E. Fermi, Ttali(1996).
- [9] D. Tong, Application of quantum Mechanics, Combridge press UK, Equation (1.24) page (17). (2017).
- [10] G. Compere et all, Electromagnetic Multipole Expansions and Logarithmic Soft Photon Theorem. SciPost Physics Core 8,066, Beussels, Belegium (2025).

- [11] R.G. Littlejohn ,Orbital Angular Momentum and Spherical Harmonics,Bohr physics Berkeley .edulclassesl2211.Note 15(2019).
- [12] A. Kumar, Semester II-2017-2018, Department of Physics IITKanpur Lecture 12(2018).
- [13] J.M.D. Coey, Magnetism and Magnetic Materials, CAMBRIDGE UNIVE. Press, chapters(2-5)(2009).